Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 54. Fortsetzung

vorher sahen, der entstehende Mechanismus unter dem Einflusse dieser Kräfte im Gleichgewichte. Man kann daher Stabspannungen in den zu dem Mechanismus gehörigen Stäben angeben, die mit der willkürlich angenommenen Spannung des herausgenommen gedachten Stabes überall Gleichgewicht herstellen.

Obschon das Ausnahmefachwerk sonst als ein Grenzfall des statisch bestimmten Fachwerks erscheint, theilt es, wie aus diesen Betrachtungen hervorgeht, viele Eigenschaften mit dem statisch unbestimmten Fachwerke. In der That muss man auch zur Berechnung der Stabspannungen für jene Belastungsfälle, die nach dem Vorhergehenden überhaupt als zulässig erscheinen, dieselben Methoden anwenden, wie beim statisch unbestimmten Fachwerke.

Man nehme also einen Stab heraus und ermittele mit Hülfe eines Kräfteplans T die Spannungen in den Stäben des Mechanismus, die zu den gegebenen Lasten gehören. Dann zeichne man einen Kräfteplan u, der die Spannungen im Mechanismus liefert, die durch eine Einheitsspannung in dem vorher beseitigten Stabe hervorgerufen werden. Nachdem dies geschehen ist, findet man die Spannung X des beseitigten Stabes auf Grund derselben Ueberlegungen wie in § 49 nach der schon damals für das statisch unbestimmte Fachwerk abgeleiteten Formel (67), S. 346

$$X = -\frac{\Sigma u r T}{\Sigma u^2 r}.$$

Auch die Spannungen aller übrigen Stäbe folgen dann leicht in derselben Weise wie früher.

§ 54. Fortsetzung.

Bisher war nur von solchen Belastungen des Ausnahmefachwerks die Rede, die sich selbst als Ausnahmefälle darstellen. Wird das Ausnahmefachwerk in anderer, also in beliebiger Weise belastet, so müssten die Stabspannungen zwar unendlich gross werden, wenn die Stäbe ihre Längen nicht ändern könnten. In Wirklichkeit wird aber unter dem Einflusse der Belastung und der durch sie hervorgerufenen Stabspannungen eine Gestaltänderung des Fachwerks eintreten, die, wie wir schon wissen, verhältnissmässig (nämlich im Verhältnisse zu den elastischen Längenänderungen der Stäbe selbst) gross ist. Damit hört der Ausnahmefall auf, genau verwirklicht zu sein und die Spannungen der Stäbe werden nicht unendlich gross, sondern nur, weil sich die Gestalt des Fachwerks immerhin nicht viel von der dem Ausnahmefalle entsprechenden entfernt hat, sehr gross ausfallen.

Im Allgemeinen wird man nun zwar, wie schon früher bemerkt wurde, die Ausnahmefachwerke ihrer ungünstigen Eigenschaften wegen vermeiden. Wenn es sich aber nur um verhältnissmässig geringe Lasten handelt, die von einer Tragconstruction aufzunehmen sind, so dass man die dadurch hervorgerufenen, wenn auch sehr stark vergrösserten Spannungen nicht zu fürchten braucht, kann man doch gelegentlich mit Rücksicht auf andere Erwägungen zur Ausführung von Ausnahmefachwerken gelangen. Man muss dann im Stande sein, die thatsächlich (an Stelle der unendlich grossen) auftretenden Stabspannungen zu berechnen. Ein ganz allgemein anwendbares direktes Verfahren für die Lösung dieser Aufgabe ist bisher, so viel mir bekannt ist, nicht ausgearbeitet worden und ich will mich jetzt auch nicht mit einem Versuche aufhalten, die Lücke auszufüllen. Dagegen ist es in den einzelnen Fällen, also bei gegebener Gliederung des Ausnahmefachwerks, in der Regel leicht möglich, einen Weg für die Lösung der Aufgabe, der dem besonderen Falle angepasst ist, ausfindig zu machen. Ich werde das Verfahren hier an einem Beispiele zeigen, das der Praxis unmittelbar entnommen ist.

Die früher besprochenen Methoden für die Ermittelung der Stabspannungen versagen nämlich in diesem Falle. Wenn man bereits wüsste, in welche Gestalt das Fachwerk in Folge der Belastung endgültig übergeht, wäre die Lösung der Frage freilich sehr einfach. Denn nach der Gestaltänderung ist das Fachwerk nicht mehr im Ausnahmefalle und damit wird es statisch bestimmt. Kann man also aus der unmittelbaren Beobachtung an einem bereits ausgeführten Ausnahmefachwerke die Gestaltänderung feststellen, die es nach einer Belastung erfahren hat, so findet man die nun in den Stäben bestehenden Stabspannungen sofort durch Zeichnen eines Kräfteplans oder

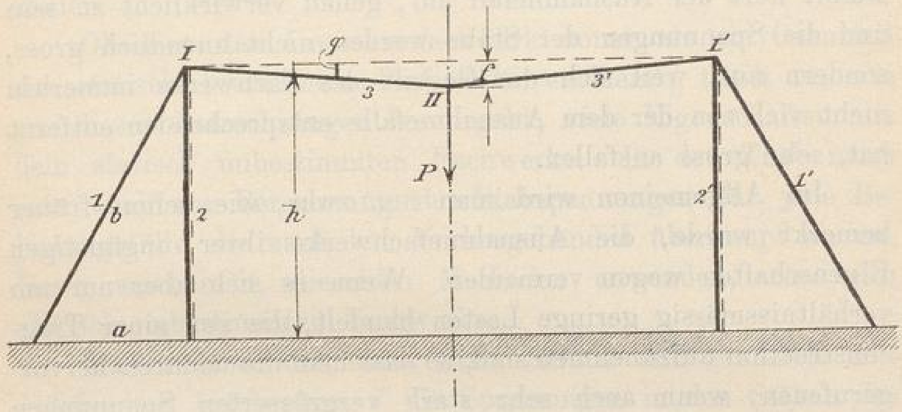

Abb. 138a.

auch nach einer der anderen früher besprochenen Methoden. Die Schwierigkeit besteht aber darin, dass man die zu erwartende Gestaltänderung von vornherein in der Regel gar nicht kennt, sondern sie selbst erst voraussagen soll.

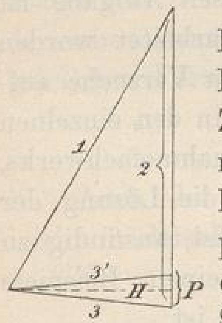

Abb. 138b.

Abb. 138a zeigt das Beispiel, an dem die Lösung der Aufgabe durchgeführt werden soll. Die Stäbe 3 und 3′ sollen im spannungslosen Zustande in einer Geraden, Knotenpunkt II also mit I und I′ ursprünglich in gleicher Höhe gelegen haben. Nachdem die Last P am Knotenpunkte II angebracht ist, senkt sich dieser um eine Strecke f, die zwar im Vergleiche zu den Stablängen immer noch klein, gegenüber den elastischen Längenänderungen der Stäbe dagegen sehr gross ist. Man soll f und die Stabspannungen berechnen.

Stabgerüste von der durch die Abbildung gegebenen Anordnung sieht man öfters zur Aufhängung von Bogenlampen angewendet, die über der Mitte einer zwischen den Stäben 2 und 2′ liegenden Strasse angebracht werden sollen. Man wünscht in diesem Falle gewöhnlich, dass die Stäbe 3 und 3′ im belasteten Zustande nicht viel von der Horizontalen abweichen, hauptsächlich wohl, um grössere pendelnde Bewegungen der Lampen bei windigem Wetter zu vermeiden. Da das Gewicht einer Bogenlampe nicht besonders gross ist, braucht man vor der Anwendung eines Ausnahmefachwerks nicht zurück zu scheuen und kann die Stäbe 3 und 3′ im spannungslosen Zustande auf dieselbe Gerade legen. Da diese Stäbe nur Zugspannungen aufzunehmen haben, können sie natürlich auch aus Drahtseilen hergestellt werden.

In der Gestalt, die das Stabgerüst nach der Belastung annimmt, wie es in der Abbildung gezeichnet ist, bildet es einen statisch bestimmten ebenen Fachwerkträger. Die Knotenpunkte I und I′ sind durch je zwei Stäbe mit der festen Erde und der Knotenpunkt II mit den beiden vorigen ebenfalls durch zwei Stäbe verbunden. Kennt man die Senkung f von Knotenpunkt II und hiermit die Trägergestalt nach der Formänderung, so braucht man zur Ermittelung der Stabspannungen nur zwei Kräftedreiecke zu zeichnen, zuerst das für Knotenpunkt II und dann das für I. In Abb. 138^b ist der aus den beiden Kräftedreiecken bestehende Kräfteplan angegeben. Die Spannungen in der rechten Trägerhälfte stimmen mit denen in der linken der Symmetrie wegen überein.

Der Umstand, dass die neue Trägergestalt bereits ausreichend durch den Verschiebungsweg eines einzigen Knotenpunktes beschrieben wird, erleichtert die Aufgabe erheblich. Die Knotenpunkte I und I′ sind steif mit der festen Erde verbunden und ihre Verschiebungswege während der Gestaltänderung sind daher von derselben Ordnung klein wie die Längenänderungen der Stäbe, also viel kleiner als die Senkung f des Knotenpunktes II. Desshalb genügt es auch, die Senkung f zu kennen, um die Stabspannungen zu berechnen.

Freilich haben die kleinen Horizontalverschiebungen der Knotenpunkte I und I′ selbst einen grossen Einfluss auf die Grösse der Senkung f von II. Zunächst möge aber, um die Lösung der Aufgabe für den allereinfachsten Fall vorweg zu nehmen, vorausgesetzt werden, dass sich die Knotenpunkte I und I′ überhaupt nicht verschieben. Man kann sich etwa die Stangen 1 und 2 als starr und nur 3 als elastisch dehnbar vorstellen oder man kann anstatt dessen annehmen, dass das Seil 3 3′ zwischen zwei gegenüberstehenden Häusern ausgespannt ist, so dass also die Knotenpunkte I und I′ mit zur festen Erde gehören.

In diesem Falle findet man f aus der folgenden einfachen Rechnung. Man bezeichne die ursprüngliche Länge von Stab 3 mit l, die Längenänderung mit Δl, dann ist nach dem Pythagoräischen Satze

$$(l + \Delta l)^2 = l^2 + f^2$$

und hieraus, mit Vernachlässigung des von höherer Ordnung kleinen Gliedes Δl^2 gegenüber $2 l \Delta l$,

$$\Delta l = \frac{f^2}{2\,l}. \tag{77}$$

Andererseits hängt aber Δl auch mit der Stabspannung S zusammen und diese kann aus einem Kräftedreiecke entnommen werden. Man braucht sich nur in Abb. 138ª von I aus eine Parallele zu 3′ bis zur Symmetrieaxe gezogen zu denken, um ein Dreieck zu erhalten, das unter Voraussetzung eines passend gewählten Maassstabes als Kräftedreieck betrachtet werden kann. Man hat daher die Proportion

$$\frac{S}{P} = \frac{l}{2f} \quad \text{und hieraus} \quad S = \frac{Pl}{2f}. \tag{78}$$

Für die Stabverlängerung Δl findet man daraus, unter Benutzung der Stabconstanten r

$$\Delta l = rS = \frac{Plr}{2f}. \tag{79}$$

Setzt man die beiden für Δl aufgestellten Ausdrücke einander gleich, so erhält man eine Gleichung, in der f die einzige Unbekannte bildet. Man findet

$$\frac{f^2}{2\,l} = \frac{Plr}{2f} \quad \text{und hieraus} \quad f = \sqrt[3]{Pl^2 r}.$$

An Stelle von r kann man noch seinen Werth $\frac{l}{EF}$ einführen und nachträglich auch noch S durch Einführung des Ausdruckes für f in die zuvor schon aufgestellte Formel (78) berechnen. Dadurch erhält man

$$f = l\sqrt[3]{\frac{P}{EF}}; \quad S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{P^2 EF}. \tag{80}$$

Beachtenswerth ist hierbei, dass sowohl die Spannung als (in noch höherem Grade) die Formänderung nicht proportional mit der Last P wachsen, wie bei den stabilen Fachwerken, sondern langsamer. Wenn man bedenkt, dass das Fachwerk um so widerstandsfähiger wird, je weiter es sich vom Ausnahmefalle entfernt, kann dies auch nicht überraschen. Bei der Deutung der Formeln beachte man ferner, dass das darin neben P vorkommende Produkt EF selbst eine Kraft vorstellt, aber eine ganz ausserordentlich grosse, die z. B. bei Eisen ungefähr 2000 mal so gross ist, als die zulässige Spannung des Stabes 3. Bei Drahtseilen ist sie allerdings wegen des kleinen Werthes von E weit kleiner, aber doch immer noch ziemlich gross gegenüber der zulässigen Spannung des Seils.

Nach Erledigung des einfacheren Falles kehre ich nun zur ursprünglichen Aufgabe zurück. Aus dem Kräfteplane in Abb. 138[b] erkennt man, dass sich die Spannungen von 3 und 3′ nur unerheblich von ihrer Horizontalcomponenten H unterscheiden und dass auch 2, obschon der Unterschied hier etwas grösser ist, genau genug bis zum Endpunkte von H, anstatt bis zum Endpunkte von P gerechnet werden kann. Wenn man sich diese geringe Vernachlässigung, die ohne merklichen Einfluss auf das Schlussresultat ist, zur Vereinfachung der Rechnung gestattet, stehen die drei Spannungen $S_1 S_2 S_3$ in einem von vornherein bekannten Verhältnisse zu einander, da sie sich wie die Seiten b, h, a des zwischen den Stäben 1 und 2 liegenden Dreiecks der Trägerfigur zu einander verhalten. Man hat daher

$$S_1 = S_3 \cdot \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad S_2 = S_3 \cdot \frac{h}{a}$$

und hieraus folgt für die Längenänderungen der Stäbe 1 und 2

$$\Delta l_1 = S_3 \cdot r_1 \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \Delta l_2 = S_3 \cdot r_2 \frac{h}{a}.$$

Wäre S_3 gleich der Lasteinheit, so könnte man die Verschiebung des Knotenpunktes I sofort mit Hülfe des in Abb. 139 gezeichneten Verschiebungsplanes erhalten. Die Horizontalcomponente des unter dieser Voraussetzung gefundenen Verschiebungsweges ist in der Abbildung mit c bezeichnet. Da S_3 aber nicht gleich der Lasteinheit ist, so hat diese Horizontalcomponente in Wirklichkeit den Werth $S_3 \cdot c$.

Das Ausweichen von I um eine kleine Strecke in horizontaler Richtung hat auf die Senkung f von II denselben Einfluss, als wenn sich der Stab 3 um das gleiche Maass mehr gedehnt hätte. An Stelle von Gl. (77) tritt daher jetzt

$$S_3 c + \Delta l_3 = \frac{f^2}{2 l_3}.$$

Die Gleichungen (78) und (79) können dagegen ohne Weiteres übernommen werden. Man hat daher

$$\Delta l_3 = \frac{P l_3 r_3}{2f}$$

und wenn man dies und den Werth von S_3 in die vorhergehende Gleichung einsetzt, findet man

$$\frac{P l_3}{2f} c + \frac{P l_3 r_3}{2f} = \frac{f^2}{2 l_3}.$$

In dieser Gleichung ist f die einzige Unbekannte und durch Auflösen findet man

$$f = \sqrt[3]{P l_3^2 (c + r_3)}. \tag{81}$$

Natürlich kann man die Strecke c des Verschiebungsplanes, wenn man will, auch durch trigonometrische Rechnung bestimmen, da von dem Vierecke, in dem es als Seite vorkommt, zwei Seiten $\left(\Delta l_1 = r_1 \frac{b}{a} \text{ und } \Delta l_2 = r_2 \frac{h}{a}\right)$ und alle Winkel gegeben sind. Die zeichnerische Ermittelung ist aber bequemer und soll daher hier beibehalten werden.

Setzt man in Gl. (81) $c = 0$, so geht sie wieder — unter Beachtung des für r_3 einzusetzenden Werthes — in die erste der Gl. (80) über. — Nachdem f bekannt ist, findet man auch S_3 in derselben Weise wie vorher und hierauf S_1 und S_2. Es ist nicht nöthig, die Formeln anzuschreiben.

Dagegen soll noch auf einen besonderen Umstand hingewiesen werden, der sich geltend macht, wenn man den Verschiebungsplan, der in Abb. 139 nur bis zum Knotenpunkte I ausgedehnt wurde, zum Knotenpunkte II weiterzuführen sucht. In Abb. 140 ist das erste Polygon des Verschiebungsplanes in Uebereinstimmung mit Abb. 139 aufgetragen. Man beachte

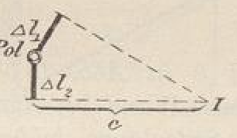

Abb. 139.

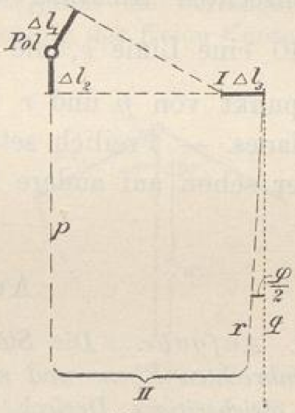

Abb. 140.

nun, dass sich Knotenpunkt II der Symmetrie wegen nur in lothrechter Richtung nach abwärts verschieben kann. Zieht man also vom Pole aus die Linie p in lothrechter Richtung, so muss auf ihr der Punkt II des Verschiebungsplanes enthalten sein. Trägt man ferner von I aus die Längenänderung Δl_3 ab, so liegt II auch auf einem durch den Endpunkt dieser Strecke gehenden Kreisbogen, dessen sehr grosser Halbmesser durch die Länge des Stabes 3 angegeben wird. Wollte man aber, wie es sonst stets geschehen darf, den Kreisbogen durch eine senkrecht zur Stabrichtung gezogene gerade Linie q ersetzen, so würde diese parallel zu p gehen und der Schnittpunkt II fiele ins Unendliche. Dies bestätigt zunächst, dass die Senkung von II jedenfalls sehr gross ist im Verhältnisse zu den Längenänderungen der Stäbe. Zugleich erkennen wir aber, dass es hier mit Rücksicht auf die verhältnissmässig grosse Länge des Kreisbogens nicht mehr zulässig ist, ihn durch eine Gerade zu ersetzen, die senkrecht zur Richtung des ersten Halbmessers steht.

Bezeichnet man den Winkel zwischen der Richtung von 3 und der Horizontalen in Abb. 138ª mit φ und beachtet man, dass dieser Winkel zugleich der Centriwinkel des Kreisbogens ist, den wir durch eine Gerade ersetzen wollen, so erkennt man, dass die zum Kreisbogen gehörige Sehne den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ mit der lothrechten Richtung einschliesst. Wir ziehen also in Abb. 140 eine Linie r, die gegen q um $\frac{\varphi}{2}$ geneigt ist. Der Schnittpunkt von p und r liefert den Punkt II des Verschiebungsplanes. — Freilich setzt diese Construction voraus, dass φ vorher schon auf andere Art ermittelt ist.

Aufgaben.

32. Aufgabe. Die Stäbe 1 und 2 in Abb. 141 liegen in einer senkrechten Ebene und sind an einer Wand befestigt, mit der sie ein gleichseitiges Dreieck von 1 m Seitenlänge bilden. Beide Stäbe sind aus Winkeleisen von 15 qcm Querschnittsfläche gebildet. Um wie viel senkt sich der freie Knotenpunkt unter einer Last P von 5000 kg, wenn der Elasticitätsmodul $= 2 \cdot 10^6$ atm gesetzt wird?

Lösung. Nach der Maxwell-Mohr'schen Formel, Gl. (62) ist die Senkung x des Knotenpunktes

$$x = \frac{1}{P}\sum STr$$

und hier fällt das Spannungsbild S mit dem Spannungsbilde T zusammen und jede dieser beiden Spannungen ist für jeden Stab dem Absolutwerthe nach gleich P oder gleich 5000 kg. Die Stabconstante r ist für jeden Stab

$$r = \frac{l}{EF} = \frac{100 \text{ cm}}{2 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 15 \text{ cm}^2} = 3{,}33 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung ein, so erhält man