Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 52. Einflusslinien für die statisch unbestimmten Grössen

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

aus § 50, die ich jetzt nicht nochmals zu wiederholen brauche, hier ebenfalls in Geltung bleiben.

Die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf die beiden Spannungsbilder Cu und Cv liefert die Arbeitsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} X\Sigma u^2 r + Y\Sigma uvr + \eta l_k t = 0 \\ X\Sigma uvr + Y\Sigma v^2 r = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

aus deren Auflösung die beiden Unbekannten X und Y gefunden werden.

§ 52. Einflusslinien für die statisch unbestimmten Grössen.

Die Maxwell-Mohr'sche Methode führt am schnellsten zum Ziele, so lange es sich nur um die Berechnung der Stabspannungen für einen einzigen, oder doch nur für ganz wenige Belastungsfälle handelt. Muss man dagegen sehr viele verschiedene Laststellungen in Betracht ziehen, wie sie etwa nacheinander bei der Ueberfahrt eines Eisenbahnzuges über eine Brücke vorkommen, so thut man besser, sich nach anderen Hülfsmitteln umzusehen, die nicht dazu nöthigen, die ganze Rechnung für jede Laststellung von Neuem zu wiederholen.

Der Anschaulichkeit wegen werde ich mich hierbei auf die Besprechung eines verhältnissmässig einfachen Beispieles, nämlich auf die Untersuchung des einfach statisch unbestimmten Fachwerkbogens beschränken, obschon man leicht bemerken wird, dass die ganze Betrachtung ohne wesentliche Aenderungen auch allgemeiner durchgeführt werden könnte.

Ein solcher Fachwerkbogen bildet an sich ein statisch bestimmtes Fachwerk und der aus ihm entstehende Träger wird nur dadurch statisch unbestimmt, dass ihm vier Auflagerbedingungen vorgeschrieben sind. Als statisch unbestimmte Grösse sieht man hier am besten den Horizontalschub an. Sobald dieser für irgend eine Laststellung berechnet ist, kann man alle Stabspannungen auf einfache Art, also etwa durch Zeichnen eines Kräfteplans erhalten, da die Vertikal-

Componenten der Auflagerkräfte ebensogross sind, wie bei einem Balkenträger, also durch Momentengleichungen oder mit Hülfe eines Seilpolygons sofort ermittelt werden können.

Man nehme nun an, dass eine Einzellast von der Grösse der Lasteinheit über den Träger hin fortschreite. Zu jeder Stellung dieser Einzellast sei der Horizontalschub auf irgend eine Art berechnet. Trägt man den Abstand der Last vom einen Auflager her als Abscisse und den zu dieser Laststellung gehörigen Horizontalschub in einem passenden Maassstabe als Ordinate auf, so erhält man einen Linienzug, der als die Einflusslinie für den Horizontalschub bezeichnet wird. Es ist hierbei übrigens nur nöthig, den Horizontalschub für die Laststellungen über den Knotenpunkten gesondert zu berechnen. Denn zwischen zwei Knotenpunkten wird die Last von der Fahrbahn-Construction aufgenommen, die sie in bekannten Antheilen auf die beiden Knotenpunkte überträgt. Da dieses Verhältniss eine lineare Function der Abscisse der Laststellung ist, wird auch die Einflusslinie zwischen beiden Knotenpunkten durch eine gerade Linie gebildet. Die Einflusslinie ist daher ein Polygon, dessen Ecken auf Lothrechten mit jenen Knotenpunkten liegen, an denen die Fahrbahntafel befestigt ist und es ist nur nöthig, die Ordinaten dieser Eckpunkte auf irgend eine Art zu berechnen.

Setzen wir für den Augenblick voraus, dass die Einflusslinie bereits construirt sei, so kann man mit ihrer Hülfe sofort auch den Horizontalschub für ein beliebiges System senkrechter Lasten angeben. Man braucht nur jede Last mit der Verhältnisszahl zu multipliciren, die als Ordinate der Einflusslinie ihr zugeordnet ist, und die Summe der Produkte zu addiren. Sobald die Einflusslinie gegeben ist, unterscheidet sich daher die Berechnung des Trägers kaum noch von der eines statisch bestimmten Trägers. Ich kann mich daher hier darauf beschränken, die Ermittelung der Ordinaten der Einflusslinie für den Horizontalschub auseinander zu setzen.

Zu diesem Zwecke kann man sich natürlich auch wieder des bereits früher auseinander gesetzten Maxwell-Mohr'schen

Verfahrens bedienen, indem man für jeden Knotenpunkt, der zur Unterstützung der Fahrbahn dient, den zugehörigen Horizontalschub nach Gl. (67), S. 346 berechnet. Hier soll aber noch ein anderes Verfahren beschrieben werden, das sich auf die Anwendung des Williot'schen Verschiebungsplanes in Verbindung mit dem Maxwell'schen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen gründet.

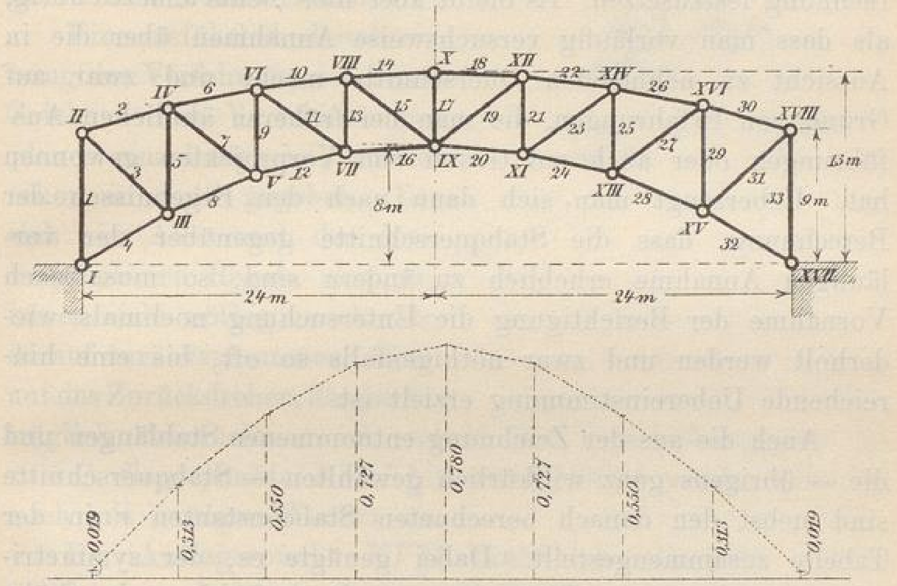

Abb. 135a und 135b.

Man denke sich den in Abb. 135ª gezeichneten Fachwerkbogen zunächst als Balkenträger aufgestellt und an dem auf dem Rollenlager sitzenden Auflagerpunkte eine horizontale Kraft, die gleich der Lasteinheit ist, als einzige Belastung angebracht. Für diesen Belastungsfall wurde auf einem Zeichenblatte in grösserem Maassstabe (wonach überhaupt die hierzu gehörigen Figuren, für die nur ein beschränkter Raum zur Verfügung steht, nachträglich verkleinert wiedergegeben sind) ein Kräfteplan gezeichnet, der nichts Bemerkenswerthes bietet und daher hier nicht mit aufgenommen wurde. Indessen sind die aus ihm entnommenen Stabspannungen u in der weiter unten folgenden Tabelle (S. 366) angegeben.

Die Stablängen und auch die Stabquerschnitte müssen als bereits bekannt vorausgesetzt werden, wenn die Einflusslinie construirt oder überhaupt die Berechnung der Stabspannungen für den statisch unbestimmten Träger durchgeführt werden soll. Freilich kennt man bei der Aufstellung eines Projektes die Stabquerschnitte nicht von vornherein, sondern beabsichtigt, sie erst auf Grund des Ergebnisses der statischen Berechnung festzusetzen. Es bleibt aber hier nichts anderes übrig, als dass man vorläufig versuchsweise Annahmen über die in Aussicht zu nehmenden Querschnitte macht und zwar auf Grund von Erfahrungen, die man bei früheren ähnlichen Ausführungen oder auch auf Grund von Vorprojekten gewonnen hat. Ueberzeugt man sich dann nach den Ergebnissen der Berechnung, dass die Stabquerschnitte gegenüber der vorläufigen Annahme erheblich zu ändern sind, so muss nach Vornahme der Berichtigung die Untersuchung nochmals wiederholt werden und zwar nöthigenfalls so oft, bis eine hinreichende Uebereinstimmung erzielt ist.

Auch die aus der Zeichnung entnommenen Stablängen und die — übrigens ganz willkürlich gewählten — Stabquerschnitte sind nebst den danach berechneten Stabconstanten r in der Tabelle zusammengestellt. Dabei genügte es, der symmetrischen Anordnung des Trägers wegen, die Aufzählung der Stäbe auf nur eine Trägerhälfte zu erstrecken. Der Elasticitätsmodul wurde, obschon es auf seinen genaueren Werth gar nicht ankommt, solange es sich nur um die durch die Lasten hervorgerufenen Spannungen handelt, der Anschaulichkeit wegen ebenfalls mit eingesetzt und zwar wurde er zu 2000000 atm angenommen. Hiernach sind die Längenänderungen Δl der Stäbe berechnet, die zum Spannungsbilde u gehören.

Nach diesen Vorbereitungen zeichnet man den Verschiebungsplan für den angenommenen Belastungsfall. Dabei wurde zunächst angenommen, dass Stab 4 seine Richtung nicht ändere. Das erste Stück des Verschiebungsplanes ist in Abb. 136 dargestellt. Dabei sind alle Längenänderungen in 125-facher Vergrösserung aufgetragen. Wenn man die Zeichnung in demselben

Maassstabe fortsetzen wollte, würde sie aber den hier zur Verfügung stehenden Raum überschreiten. Desshalb ist der gesammte Verschiebungsplan ausserdem noch in Abb. 137 in nur 40-facher Vergrösserung gezeichnet. Wer die Zeichnung zur Uebung wiederholen will, möge sie jedoch in dem Maassstabe der Abb. 136 weiterführen, da sonst selbst bei aller Sorgfalt nur eine ungenügende Genauigkeit erzielt werden könnte.

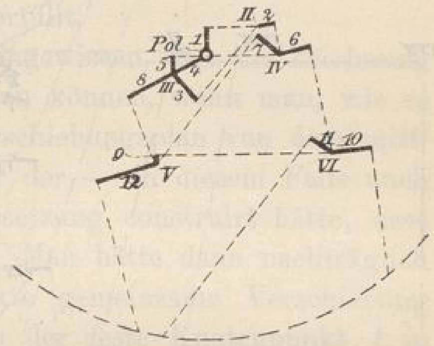

Abb. 136.

Eine ausführliche Beschreibung des Verfahrens, das beim Zeichnen des Verschiebungsplanes einzuhalten ist, wurde schon in § 48 gegeben. Da sich hier Alles nach den dort besprochenen Regeln abspielt, ist es nicht nöthig, nochmals darauf zurückzukommen. Nur auf das Zurückdrehen, das nachträglich vorzunehmen ist, sobald der Verschiebungsplan bis zum Auflagerpunkte *XVII* hin durchgeführt wurde, gehe ich noch mit wenigen Worten ein.

Der Auflagerpunkt *XVII* kann sich, da jetzt vorausgesetzt war, dass er auf einem Rollenlager sitze, nur in horizontaler Richtung verschoben haben. Dass Abb. 137 zugleich eine Verschiebung in vertikaler Richtung nachweist, rührt nur von der Eingangs zu Grunde gelegten unzutreffenden Voraussetzung her, dass sich die Richtung des Stabes 4 nicht geändert habe. Wir müssen daher zuletzt noch eine Drehung des ganzen Trägers ohne Gestaltänderung vornehmen, durch die *XVII* auf die horizontale Auflagerbahn zurückgeführt wird. Hierbei beschreibt *XVII* einen kleinen Kreisbogen um den festen Auflagerpunkt *I*, der im Verschiebungsplane durch eine lothrechte gerade Linie angegeben wird. Wir ziehen also in Abb. 137 eine Horizontale durch den Pol und eine Lothrechte durch *XVII* und erhalten als Schnittpunkt die richtige Lage *XVII'* von Knotenpunkt *XVII* im Verschiebungsplane. Auch

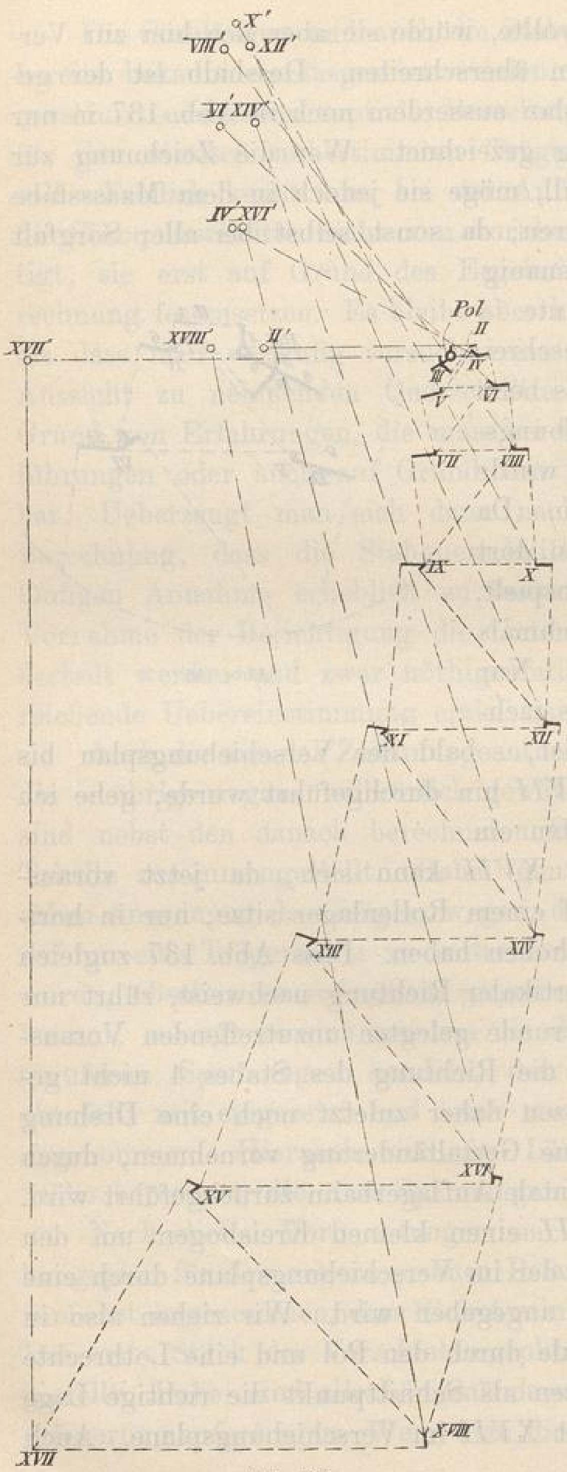

Abb. 137.

alle übrigen Knotenpunkte beschreiben beim Zurückdrehen kleine Kreisbögen um I, die im Verschiebungsplane durch geradlinige Strecken darzustellen sind, die senkrecht zu den in Abb. 135^a von I nach den betreffenden Knotenpunkten gezogenen Halbmessern stehen und deren Längen sich zur Strecke $XVII$—$XVII'$ des Verschiebungsplanes wie die zugehörigen Halbmesser verhalten.

Dabei war es für unseren Zweck nur nöthig, das Zurückdrehen mit den Knotenpunkten des Obergurts vorzunehmen, an denen, wie dabei vorausgesetzt wird, die Fahrbahn befestigt sein soll, so dass die Lasten an ihnen angreifen. Man hat hierbei noch eine Controlle für die Genauigkeit der Zeichnung, indem der symmetrischen Gestalt des Trägers wegen die sich auf beiden Trägerhälften entsprechenden Knotenpunkte nach der Formänderung in gleicher Höhe, also auch die Punkte *VIII'*, *XII'* u. s. f. des Verschiebungsplanes auf derselben Horizontalen liegen müssen. Ausserdem müssen sie auch von einer durch *X'* gezogenen Lothrechten nach beiden Seiten hin um gleichviel abstehen. Bei der im grösseren Maassstabe auf dem Zeichenblatte ausgeführten Zeichnung war diese Probe recht befriedigend erfüllt.

Zugleich sei noch darauf hingewiesen, dass die Zeichnung erheblich hätte vereinfacht werden können, wenn man, wie es früher besprochen war, den Verschiebungsplan von dem mittleren Knotenpunkte *X* aus unter der — in diesem Falle auch wirklich zutreffenden — Voraussetzung construirt hätte, dass Stab 17 seine Richtung behält. Man hätte dann nachträglich noch eine für alle Knotenpunkte gemeinsame Verschiebung vorzunehmen gehabt, durch die der feste Knotenpunkt *I* in seine Lage, also im Verschiebungsplane zum Pole (und hiermit zugleich auch Knotenpunkt *XVII* auf seine horizontale Auflagerbahn) zurückgeführt würde. Anstatt dessen hätte man auch umgekehrt den Pol im Verschiebungsplane nachträglich auf Punkt *I* rücken können, womit alle weiteren Aenderungen entbehrlich geworden wären. Es hätte auch genügt, den Verschiebungsplan nur für eine Trägerhälfte zu entwerfen.

Obschon ich aber nicht unterlassen wollte, auf die Möglichkeit dieser Vereinfachung hinzuweisen, hielt ich es doch für besser, zunächst bei dem ursprünglich angegebenen Verfahren stehen zu bleiben, da es nützlicher ist, sich zunächst einmal mit diesem gründlich vertraut zu machen.

Nachdem der Verschiebungsplan fertig ist, kann man daraus mit Hülfe des Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen die in Abb. 135^b (S. 359) bereits unterhalb der Trägerfigur gezeichnete Einflusslinie für den Horizontalschub entnehmen. Hierzu bedenke man, dass die Lasteinheit etwa am Knotenpunkte *VI* eine Horizontalverschiebung des immer noch auf einem Rollenlager sitzend gedachten Auflagerpunktes *XVII* hervorbringt, die nach dem Maxwell'schen Satze ebenso gross ist, als die Vertikalverschiebung des Knotenpunktes *VI* bei dem vorigen Belastungsfalle, auf den sich der Verschiebungsplan bezieht. Wir entnehmen also aus Abb. 137 die senkrechte Entfernung des Punktes *VI'* von der durch den Pol gezogenen Horizontalen, die wir mit x_6 bezeichnen wollen und setzen sie gleich der Vergrösserung der Spannweite, die durch eine am Punkte *VI* in lothrechter Richtung angreifende Lasteinheit herbeigeführt wird für den Fall, dass das rechte Auflager auf einem Rollenlager sitzt. Damit diese Verschiebung wieder rückgängig gemacht werde, müssen wir einen Horizontalschub H_6 an dem Auflager anbringen, dessen Berechnung unsere Aufgabe bildet. Wir wissen aber bereits, um wieviel sich der auf dem Rollenlager sitzende Auflagerpunkt unter dem Einflusse einer horizontalen Kraft verschiebt. Dieser Verschiebungsweg, der mit y bezeichnet werden mag, ist gleich der Strecke vom Pole des Verschiebungsplanes bis zum Punkte *XVII'*. Für eine horizontale Kraft von der Grösse H ist demnach der Verschiebungsweg gleich Hy und da dies gleich x_6 sein soll, finden wir

$$H_6 = \frac{x_6}{y}. \tag{75}$$

Die beiden Strecken sind aus dem Verschiebungsplane bekannt und hiermit auch ihr Verhältniss. Dass H_6 gleich einer Verhältnisszahl gefunden wird, rührt davon her, dass es zur Lasteinheit am Knotenpunkte *VI* gehören sollte. Wird eine Last von der beliebigen Grösse P an *VI* aufgebracht, so ist der zugehörige Horizontalschub

$$H = P\frac{x_6}{y}. \tag{76}$$

Für alle übrigen Knotenpunkte findet man diese Verhältnisszahlen oder „Einflusszahlen“ auf gleiche Art. Hiernach wurde die Einflusslinie in Abb. 135[b] aufgetragen. Den Ordinaten sind ihre Werthe überdies beigeschrieben.

Ausserdem mag noch erwähnt werden, dass man ganz ähnlich zu verfahren hat, wenn etwa ausser lothrechten auch beliebig geneigte — aber in der Constructionsebene des Trägers liegende — Lasten vorkommen sollten. Greift am Knotenpunkte *VI* eine in schiefer Richtung gehende Last an, so hat man im Verschiebungsplane die Strecke vom Pole zum Punkte *VI'* auf eine dazu gezogene Parallele zu projiciren. Nennt man die Projektion jetzt ebenfalls x_6, so folgt der durch die Last hervorgerufene Horizontalschub gleichfalls aus den Gleichungen (75) bezw. (76). — Eine Einflusslinie kann man für den Fall, dass Lasten von allen möglichen Richtungen vorkommen, freilich nicht mehr benutzen. Man kann sich aber etwa dadurch helfen, dass man zwei Einflusslinien zeichnet, eine für senkrechte und eine zweite für horizontal gerichtete Lasten. Dann ist jede gegebene Last in zwei Componenten zu zerlegen, für jede Componente der zugehörige Horizontalschub (diesmal stets auf den rechten Auflagerpunkt bezogen) aus den Einflusslinien zu entnehmen und die Summe aus beiden Werthen zu nehmen. — Auch andere Hülfsmittel, auf die hier nicht weiter eingegangen zu werden braucht, bieten sich ohne Schwierigkeiten dar.

Schliesslich wurde noch der Horizontalschub des Trägers für den Fall bestimmt, dass an den Knotenpunkten *II* und *XVIII* eine Last von je 500 kg, an allen übrigen Knotenpunkten des Obergurts eine Last von je 1000 kg angreift. Multiplicirt man diese Lasten mit den aus Abb. 135^b ersichtlichen Einflusszahlen und addirt, so erhält man

$$H = 10 + 313 + 550 + 727 + 780 + 727 + 550 \\ + 313 + 10 = 3980 \text{ kg}.$$

Zum Zwecke des Vergleichs wurde ausserdem der Horizontalschub auch nach dem Maxwell-Mohr'schen Verfahren für denselben Belastungsfall direkt berechnet. Die Ausrechnung der Summen erfolgte in Form der auf Seite 366 folgenden Tabelle, auf die schon vorher mehrmals hingewiesen wurde.

Hierzu ist noch zu bemerken, dass die Spannungen T durch die gegebenen Lasten in dem als Balken aufgelagerten Träger hervorgerufen werden. Sie wurden mit Hülfe eines besonderen Kräfteplanes ermittelt, der hier nicht mit aufgenommen wurde. Der Elasticitätsmodul ist gleich 2000000 atm gesetzt.

Tabelle.

Stab Nr.	Stablänge l in cm	Querschnittsfläche F in cm^2	$r = \frac{l}{EF}$ in $\frac{cm}{kg}$	Spannung T in kg	Verhältnisszahl u	rTu	u^2r
1	900	115	$3{,}92 \cdot 10^{-6}$	-4000	$+0{,}59$	$-9{,}25 \cdot 10^{-3}$	$1{,}360 \cdot 10^{-6}$
2	630	118	2,67 „	-3000	$+0{,}50$	$-4{,}00$ „	0,667 „
3	810	89,9	4,50 „	$+3900$	$-0{,}65$	$-11{,}45$ „	1,900 „
4	720	115	3,14 „	0	$-1{,}16$	0	4,230 „
5	730	89,9	4,05 „	-3800	$+0{,}47$	$-7{,}27$ „	0,895 „
6	610	118	2,58 „	-6200	$+1{,}00$	$-16{,}00$ „	2,580 „
7	770	89,9	4,27 „	$+3950$	$-0{,}64$	$-10{,}80$ „	1,750 „
8	650	115	2,83 „	$+3150$	$-1{,}60$	$-14{,}25$ „	7,250 „
9	600	89,9	3,33 „	-2750	$+0{,}30$	$-2{,}75$ „	0,300 „
10	600	118	2,54 „	-8600	$+1{,}43$	$-31{,}20$ „	5,200 „
11	750	89,9	4,16 „	$+3200$	$-0{,}55$	$-7{,}31$ „	1,260 „
12	620	115	2,70 „	$+6200$	$-2{,}05$	$-34{,}30$ „	11,300 „
13	530	89,9	2,94 „	-1150	$+0{,}03$	$-0{,}10$ „	0,027 „
14	600	118	2,54 „	-9700	$+1{,}60$	$-39{,}40$ „	6,500 „
15	770	89,9	4,28 „	$+1400$	$-0{,}23$	$-1{,}38$ „	0,226 „
16	600	115	2,61 „	$+8600$	$-2{,}43$	$-54{,}50$ „	15,400 „
17	500	89,9	2,78 „	-250	$+0{,}14$	$-0{,}05$ „ *)	0,028 „ *)
					Summen:	$-244{,}01 \cdot 10^{-3}$	$60{,}873 \cdot 10^{-6}$

*) Für den Stab 17 sind nur die Hälften eingesetzt, weil er zu jeder Trägerhälfte gehört.

Für den Horizontalschub findet man nun nach Gl. (67), S. 346

$$H = -\frac{\Sigma\, urT}{\Sigma\, u^2 r} = \frac{244{,}01 \cdot 10^{-3}}{60{,}873 \cdot 10^{-6}} = 4020 \text{ kg}.$$

Es genügt nämlich, beide Summen nur auf eine Trägerhälfte zu erstrecken, da sonst nur noch der Faktor 2 in Zähler und Nenner hinzukäme. Deshalb waren vorher auch in der Tabelle die Beiträge von Stab 17 zu den beiden Summen nur zur Hälfte eingesetzt.

Der Vergleich mit dem vorher gefundenen Werthe von $H = 3980$ zeigte einen Unterschied von nur ein Procent, worauf es bei den in der Praxis vorliegenden Aufgaben gewöhnlich nicht ankommt. Freilich ist das Resultat des Vergleiches verhältnissmässig günstig und es fragt sich, ob es sich immer so gut gestaltet. Jedenfalls ist dies nur durch grosse Sorgfalt bei der Construction des Verschiebungsplanes zu erreichen und der nach der Mohr'schen Methode ermittelte Werth ist im Allgemeinen als der genauere zu betrachten. Der Kräfteplan T, der bei ihm noch in Frage kommt, lässt sich nämlich genauer zeichnen, als der Verschiebungsplan. Freilich kann man andererseits beim Ausrechnen der Summen auch leichter einmal einen groben Fehler begehen, als beim Verschiebungsplane, bei dem er sich dem Auge sehr bald bemerklich machen würde.

§ 53. Die Ausnahme-Fachwerke als statisch unbestimmte Constructionen.

Ein Fachwerk oder ein Fachwerkträger möge die zur Herstellung der Steifigkeit im Allgemeinen erforderliche Anzahl von Stäben gerade besitzen; dabei soll aber der in den vorhergehenden Abschnitten schon mehrfach besprochene Ausnahmefall vorliegen, bei dem nicht in Folge der Gliederung im Allgemeinen, sondern wegen der besonderen Gestalt der Trägerfigur die Stäbe trotz ihrer sonst ausreichenden Anzahl keine hinreichende Steifigkeit herbeiführen. Ich erinnere besonders daran, dass der Ausnahmefall dahin erklärt werden kann, dass sich ein Stab gerade im Maximum oder Minimum der Länge befindet, die mit den Längen der übrigen Stäbe (und den Auflagerbedingungen) verträglich ist. Denkt man sich nämlich einen Stab aus einem statisch bestimmten Fachwerke (oder Fachwerkträger) entfernt, so erhält man, wie schon wiederholt auseinandergesetzt wurde, einen Mechanismus, bei dessen Bewegung sich die Entfernung der Endknotenpunkte des herausgenommenen Stabes im Allgemeinen ändert. In diesem Falle reicht der Stab, wenn er wieder eingesetzt wird, aus, um die Bewegung zu verhindern und die Construction ist steif. Be-