Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 51. Die Temperaturspannungen

§ 51. Die Temperaturspannungen.

Wir haben bisher nur jene Spannungen berechnet, die durch die Lasten hervorgebracht werden und mit der Wegnahme der Lasten wieder verschwinden. Dass die Montirungsspannungen, die etwa daneben bestehen, nicht berechnet werden können, falls sie nicht absichtlich herbeigeführt und dann durch genau bestimmte und als gegeben anzusehende Herstellungsbedingungen geregelt werden, war schon früher erwähnt worden. Aber auch dann, wenn anfänglich gar keine Montirungsspannungen vorhanden waren, tritt im Allgemeinen ein System von Spannungen auf, das von den Lasten unabhängig ist, sobald sich die Temperaturen der Stäbe ändern. Man bezeichnet sie als Temperaturspannungen und muss sie ebenso sorgfältig berechnen, wie die von den Lasten selbst herrührenden, da sie unter Umständen sehr gross werden können. Die Temperaturschwankungen, durch die sie hervorgerufen werden, sind gewöhnlich von vornherein gegeben, z. B. bei Constructionen, die im Freien aufgestellt sind, durch die meteorologischen Erfahrungswerthe.

Sehr leicht überzeugt man sich z. B. von dem Einflusse, den eine Temperaturänderung ausübt, beim Bogenträger mit zwei Gelenken. An einem heissen Sommertage sind die Stäbe viel wärmer, als bei der Montirungstemperatur und wenn sie spannungslos bleiben sollten, müssten sie die Möglichkeit haben, sich dementsprechend auszudehnen. Wäre der Bogenträger als Balken aufgestellt, also eine Auflagerbedingung beseitigt, so würde dem kein Hinderniss im Wege stehen. Jeder Stab würde sich dann, falls alle die gleiche Temperatur haben, im selben Verhältnisse verlängert haben und die Trägerfigur würde der ursprünglichen ähnlich geblieben sein. Im gleichen Verhältnisse würde sich demnach auch die Spannweite, also die Entfernung der beiden Auflagerpunkte vergrössert haben. Beim Bogenträger wird aber diese Entfernung durch die Auflagerbedingungen constant erhalten. Es muss daher ein Auflagerzwang, d. h. ein Horizontalschub auftreten, der die Ausdehnung verhindert. Dieser hat zugleich ein System von Spannungen in allen Stäben zur Folge. — Beim Bogenträger mit drei Gelenken (und überhaupt bei den statisch bestimmten Trägern) ist dies anders. Bei ihm hebt sich einfach das Mittelgelenk um so viel, dass die Spannweite constant bleibt, während jede Scheibe bei der Erwärmung ihrer ursprünglichen Gestalt ähnlich (wenn auch nicht mehr ähnlich gelegen) bleibt.

Durch die vorhergehenden Bemerkungen ist auch schon ein Weg gewiesen, auf dem man zur Berechnung des durch die Erwärmung hervorgerufenen Horizontalschubes beim einfach statisch unbestimmten Bogenträger gelangen kann. Dieser Horizontalschub muss so gross sein, dass er die Vergrösserung der Spannweite durch die Erwärmung wieder rückgängig machen kann. Versteht man daher in Gleich. (62), S. 324 unter x die gegebene Vergrösserung der Spannweite bei Wegfall des Auflagerzwanges, unter P den gesuchten Horizontalschub, unter S und T, die hier gleich mit einander sind, die durch P hervorgerufenen Stabspannungen (die gleich P mal einer Verhältnisszahl sind, die aus einem Kräfteplane für $P = 1$ entnommen werden kann), so kann Gleich. (62) unmittelbar nach der Unbekannten P aufgelöst werden.

Uebrigens braucht eine gleichmässige Temperaturänderung aller Stäbe nicht gerade nothwendig bei allen statisch unbestimmten Trägern Temperaturspannungen herbeizuführen. Ein über mehrere Oeffnungen durchlaufender Fachwerkbalken ohne Mittelgelenke wird z. B. durch die ihm vorgeschriebenen Auflagerbedingungen, obschon deren Zahl auch grösser als drei ist, nicht daran gehindert, sich geometrisch ähnlich zu verändern. Es entstehen daher auch keine Spannungen, wenn sich die Temperatur aller Stäbe um gleichviel ändert. Anders ist es aber auch in diesem Falle, wenn einzelne Stäbe mehr erwärmt werden, als andere (also z. B. der frei liegende Obergurt mehr, als der etwa im Schatten liegende Untergurt). Dann treten auch hier Temperaturspannungen auf.

Natürlich kann es sich hier wie in anderen Fällen nicht darum handeln, die verschiedenen Umstände, die bei den praktischen Anwendungen vorkommen können, im Einzelnen durchzusprechen. Aufgabe der Mechanik ist es nur, die Methoden zu liefern, nach denen solche Aufgaben im Allgemeinen gelöst werden können, während die weitere Ausarbeitung und die geschickte Verwendung dieser Methoden bei den einzelnen, praktisch vorliegenden Aufgaben in das Gebiet der Constructionslehre gehören.

Ich nehme daher jetzt an, dass irgend ein einzelner Stab, der die Ordnungsnummer k tragen möge, um t Grad Celsius erwärmt (oder bei negativem t abgekühlt) werde, während die übrigen ihre Temperatur behalten sollen. Es handelt sich darum, die Spannungen zu berechnen, die hierdurch in dem statisch unbestimmten Träger hervorgerufen werden.

Wenn der Träger einfach statisch unbestimmt ist, können wir den Stab k als den überzähligen betrachten. Es könnte freilich auch vorkommen, dass der beliebig ausgewählte Stab k gar nicht als überzähliger aufgefasst werden dürfte, indem er nicht zu jenem Theile des ganzen Stabverbandes gehörte, der etwa allein statisch unbestimmt wäre. In diesem Falle würde aber die Temperaturänderung des Stabes k überhaupt keine Temperaturspannungen hervorrufen. Denn wenn wir ihn uns herausgenommen dächten, dürfte unter der genannten Voraussetzung der Rest kein steif verbundenes System mehr bilden. Der Rest würde daher einer Entfernung oder Annäherung der Knotenpunkte, zwischen denen der Stab k verlief, keinen Widerstand entgegensetzen, d. h. die Ausdehnung des Stabes unter dem Einflusse der Erwärmung könnte ohne jeden Zwang erfolgen und es kämen überhaupt keine Spannungen zu Stande. Da dieser Fall ohne weiteres Interesse ist, können wir daher den Stab k als den überzähligen ansehen.

Die im Stabe k auftretende Spannung sei mit X bezeichnet und werde, wie immer, positiv gerechnet, wenn sie eine Zugspannung ist, obschon man natürlich bei einem positiven t eine Druckspannung im Stabe zu erwarten hat. Dies muss sich aber bei der Ausrechnung durch das Vorzeichen von X von selbst herausstellen.

Wie in früheren Fällen zeichnen wir auch jetzt wieder einen Kräfteplan u, der die Spannungen im Hauptnetze angibt, die zu einer Zugspannung von der Grösse der Lasteinheit im überzähligen Stabe gehören. Die thatsächlich im Stabe i auftretende Spannung S_i ist dann

$$S_i = u_i X$$

zu setzen und es handelt sich nur noch um die Ermittelung der Unbekannten X.

Hierzu verfahren wir ebenso wie früher. Wir betrachten ein Spannungsbild Cu, das ohne äussere Lasten (abgesehen von den zugehörigen Auflagerkräften) an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellt und wenden darauf das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten an, indem wir als virtuelle Verschiebungswege der Knotenpunkte jene ansehen, die unter dem Einflusse der Erwärmung des Stabes k thatsächlich zu Stande kommen.

Dabei ist zu beachten, dass die Längenänderung jedes zum Hauptnetze gehörigen Stabes i

$$\Delta l_i = r_i S_i = r_i u_i X$$

zu setzen ist, während beim Stabe k noch ein Glied hinzutritt, das unmittelbar auf die Temperaturänderung zurückzuführen ist. Aus dem gegebenen Ausdehnungs-Coefficienten η des Materials (für Eisen $\frac{1}{80\,000}$ der Länge für 1^0 C.) und der Länge l_k des Stabes k folgt die auf die Erwärmung für sich zurückzuführende Längenänderung zu

$$\eta l_k t.$$

Dazu kommt die von der Spannung X hervorgerufene Längenänderung $r_k X$, die für ein positives X ebenfalls positiv zu rechnen ist. Man hat daher für den Stab k im Gegensatze zu den übrigen

$$\Delta l_k = r_k X + \eta l_k t = r_k u_k X + \eta l_k t,$$

wenn im letzten Ausdrucke zur Herstellung der Symmetrie mit Δl_i noch der Faktor u_k mit einbezogen wird, der den Werth $+ 1$ hat.

Die Arbeitsgleichung lautet jetzt

$$-\Sigma\, C u \Delta l = 0$$

oder nach Einführung der Werthe von Δl

$$\Sigma\, u \cdot r u X + \eta l_k t = 0,$$

woraus durch Auflösung nach X

$$X = -\frac{\eta l_k t}{\Sigma\, u^2 r} \tag{72}$$

gefunden wird. Damit ist die zunächst gestellte Aufgabe gelöst und man sieht auch, dass X in der That negativ wird, wenn t positiv ist, da sowohl η, als l_k, als $\Sigma\, u^2 r$ stets positiv sind. Die Summe ist auf den überzähligen Stab mit zu erstrecken und zwar ist für ihn, wie bereits bemerkt, $u_k = +1$ zu setzen.

Die Spannung irgend eines Stabes i ist nun

$$S_i = -u_i \frac{\eta l_k t}{\Sigma\, u^2 r}. \tag{73}$$

Sollten ferner mehrere Stäbe, anstatt eines einzigen, ihre Temperatur um beliebig gegebene Beträge ändern, so setzt sich S_i aus einer entsprechenden Anzahl von Gliedern zusammen, die alle nach dem vorstehenden Muster gebildet sind. Hierbei ist es übrigens nicht nöthig, für jeden Fall einen besonderen Kräfteplan u von Neuem zu zeichnen. Kommt nämlich nachher die Temperaturerhöhung eines Stabes m in Frage, so tritt an Stelle von u in der vorhergehenden Formel einfach das Verhältniss $\frac{u_i}{u_m}$, wobei der constante Nenner u^2_m auch noch vor das Summenzeichen gesetzt werden kann. — Anstatt dessen kann man auch die vorige Betrachtung für den Fall der Temperaturänderung mehrerer Stäbe von Neuem wiederholen.

Die unmittelbare Anwendung dieser Entwickelungen auf den Fall, dass sich alle Stäbe um gleichviel erwärmen, wäre unbequem und man hilft sich dann besser auf andere Art, wie hier an dem Beispiele des einfach statisch unbestimmten Fachwerkbogens gezeigt werden soll. Man kann sich nämlich einen solchen Fachwerkbogen dadurch in einen Balkenträger verwandelt denken, dass man einen Stab a zwischen die Auflagerpunkte einschaltet (Abb. 134), der von so grossem Querschnitte angenommen wird, dass er unter der in ihm auftretenden Spannung keine merkliche elastische Längenänderung erfährt. Man braucht dazu nur $r_a = 0$

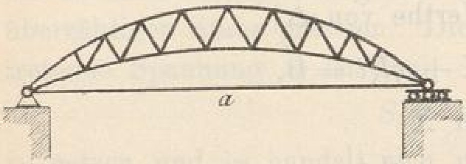

Abb. 134.

zu setzen. Wenn dann das rechte Ende auf ein Rollenlager gesetzt wird, so ist trotzdem die Bedingung noch erfüllt, dass sich dieses Ende unter dem Einflusse von Lasten nicht zu verschieben mag.

Dagegen kann man sich die Länge des Stabes a unter dem Einflusse von Temperaturänderungen veränderlich denken. Wenn nun alle übrigen Stäbe in der Temperatur um t^0 erhöht werden, so kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn sich der Stab a um t^0 abkühlte. Hiernach kann die Spannung jedes Stabes i sofort nach Gleich. (73) berechnet werden, wenn man darin Stab k durch Stab a ersetzt. Hierbei ist nur zu beachten, dass bei der Bildung von $\Sigma u^2 r$ für den überzähligen Stab a die Stabconstante $r_a = 0$ zu setzen ist.

Aehnlich wie vorher hat man auch zu verfahren, wenn der Träger zweifach statisch unbestimmt sein sollte. Die Spannung im Stabe k, der sich um t^0 erwärmt und als ein überzähliger angesehen werden soll, sei wieder mit X, die in einem zweiten überzähligen Stabe mit Y bezeichnet. Dann hat man

$$S_i = u_i X + v_i Y$$

und für jeden Stab, mit Ausnahme von k

$$\Delta l_i = r_i (u_i X + v_i Y).$$

Für den Stab k selbst dagegen wird

$$\Delta l_k = r_k (u_k X + v_k Y) + \eta l_k t.$$

Hierbei sind der Symmetrie wegen u_k und v_k wieder mit aufgenommen, obschon $u_k = +1$ und $v_k = 0$ ist. Dazu erwähne ich noch, dass die Bemerkungen über die Kräftepläne u und v

aus § 50, die ich jetzt nicht nochmals zu wiederholen brauche, hier ebenfalls in Geltung bleiben.

Die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf die beiden Spannungsbilder Cu und Cv liefert die Arbeitsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} X \Sigma u^2 r + Y \Sigma uvr + \eta l_k t = 0 \\ X \Sigma uvr + Y \Sigma v^2 r = 0, \end{array}\right\} \qquad (74)$$

aus deren Auflösung die beiden Unbekannten X und Y gefunden werden.

§ 52. Einflusslinien für die statisch unbestimmten Grössen.

Die Maxwell-Mohr'sche Methode führt am schnellsten zum Ziele, so lange es sich nur um die Berechnung der Stabspannungen für einen einzigen, oder doch nur für ganz wenige Belastungsfälle handelt. Muss man dagegen sehr viele verschiedene Laststellungen in Betracht ziehen, wie sie etwa nacheinander bei der Ueberfahrt eines Eisenbahnzuges über eine Brücke vorkommen, so thut man besser, sich nach anderen Hülfsmitteln umzusehen, die nicht dazu nöthigen, die ganze Rechnung für jede Laststellung von Neuem zu wiederholen.

Der Anschaulichkeit wegen werde ich mich hierbei auf die Besprechung eines verhältnissmässig einfachen Beispieles, nämlich auf die Untersuchung des einfach statisch unbestimmten Fachwerkbogens beschränken, obschon man leicht bemerken wird, dass die ganze Betrachtung ohne wesentliche Aenderungen auch allgemeiner durchgeführt werden könnte.

Ein solcher Fachwerkbogen bildet an sich ein statisch bestimmtes Fachwerk und der aus ihm entstehende Träger wird nur dadurch statisch unbestimmt, dass ihm vier Auflagerbedingungen vorgeschrieben sind. Als statisch unbestimmte Grösse sieht man hier am besten den Horizontalschub an. Sobald dieser für irgend eine Laststellung berechnet ist, kann man alle Stabspannungen auf einfache Art, also etwa durch Zeichnen eines Kräfteplans erhalten, da die Vertikal-