



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Vorlesungen über technische Mechanik**

**Föppl, August**

**Leipzig, 1900**

§. 49. Die Stabspannungen im einfach statisch unbestimmten Träger

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

zogene Verbindungslinie richtig angegeben. — Um die Deutlichkeit der Figur nicht durch Hinzufügung weiterer Linien zu beeinträchtigen, ist von der Ausführung der Zurückdrehung in Abb. 132 abgesehen worden. Natürlich müssten hier zuletzt wieder dieselben Verschiebungen herauskommen, die schon in Abb. 131<sup>c</sup> zusammengestellt sind, abgesehen davon, dass dort alle Verschiebungen von demselben Pole aus abgetragen sind, während hier jede Verschiebung an jenem Knotenpunkte angesetzt ist, zu dem sie gehört.

§ 49. Die Stabspannungen im einfach statisch unbestimmten Träger.

Wenn ein Stab oder eine Auflagerbedingung überzählig ist, gibt es zu jedem Belastungsfalle unendlich viele Spannungsbilder, die an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen. Denkt man sich nämlich den überzähligen Stab oder die überzählige Auflagerbedingung entfernt und bringt dafür an den Endpunkten des Stabes oder an dem Auflagerpunkte äussere Kräfte von beliebiger Grösse an, so wie sie von dem Stabe oder durch den Auflagerzwang ausgeübt werden könnten, so sind dadurch die Spannungen in dem übrig bleibenden statisch bestimmten Träger eindeutig bestimmt. Da man aber die Grösse der Stabspannung des überzähligen Stabes oder der überzähligen Auflagercomponente beliebig wählen kann, hat man im ganzen Träger unendlich viele Spannungsbilder, die vom Standpunkte der Mechanik des materiellen Punktes oder des starren Körpers aus alle gleich möglich und auch gleich wahrscheinlich sind.

Von allen diesen verschiedenen Spannungszuständen kann aber nur einer wirklich zu Stande kommen und um ihn unter allen möglichen herauszufinden, bedarf es noch einer über die Lehren der Mechanik starrer Körper hinausreichenden Kenntniss über das Verhalten des Trägers gegenüber aufgebrachten Lasten. Hierzu verhilft uns die Lehre von den elastischen Formänderungen. Wenn wir wissen, dass das Material, aus

dem die Stäbe angefertigt sind, das Hooke'sche Gesetz befolgt, hört jede Unbestimmtheit auf und wir vermögen die Stabspannungen auch für den statisch unbestimmten Träger oder wenigstens jene Stabspannungen, die von den gegebenen Lasten selbst hervorgebracht werden, in eindeutiger Weise zu berechnen.

Hierbei muss man nämlich in Erinnerung behalten, dass in einem statisch unbestimmten Träger auch dann Stabspannungen bestehen können, wenn alle Lasten fehlen. Hat man den Träger bei der Herstellung etwa so weit zusammengenietet, dass nur noch ein Stab, den man als den überzähligen betrachten kann, fehlt und findet man, dass die Länge des nun noch nachträglich einzuziehenden Stabes nicht völlig genau mit der Entfernung der Knotenpunkte übereinstimmt, zwischen denen er eingeschaltet werden soll, so wird man einen gewissen Zwang aufwenden müssen, um den Stab zum Passen zu bringen. Denn der bereits fertig gestellte Theil des Trägers bildet nach Voraussetzung schon für sich genommen eine in sich steife Construction, die jeder Entfernungsänderung der zu ihr gehörigen Knotenpunkte einen Widerstand entgegensetzt. Beim gewaltsamen Einfügen des Stabes wird also, wenn der Stab etwas zu kurz war, dieser sich etwas verlängern müssen und zugleich werden sich die Knotenpunkte, zwischen die er eingespannt wird, etwas einander nähern müssen, so dass die beiden Längen mit einander übereinstimmen. Der eingesetzte Stab geräth hierbei in Zugspannung und in dem übrigen Theile entstehen Spannungen, die sich mit dieser Spannung des überzähligen Stabes ins Gleichgewicht setzen. Wir haben dann in dem fertigen Träger ein von den äusseren Lasten ganz unabhängiges Spannungsbild vor uns, das lediglich von der Herstellungsweise bedingt ist und daher, wenn nähere Angaben hierüber fehlen, auch nicht durch Rechnung festgestellt werden kann. Man nennt diese Spannungen die Montirungsspannungen. Sie können, wie aus der soeben durchgeführten Betrachtung hervorgeht, nur in statisch unbestimmten Trägern auftreten. Von den Montirungsspannungen soll weiterhin nicht

die Rede sein; es soll sich vielmehr immer nur um jene Spannungen handeln, die von den Lasten hervorgebracht werden. Entweder stelle man sich also vor, dass das Auftreten von Montirungsspannungen durch ein genaues Einpassen der Stäbe ohne Aufwendung eines Zwanges vermieden sei oder man denke sich im anderen Falle die Montirungsspannungen den hier zu berechnenden überall noch stillschweigend hinzugefügt.

Wenn die Berechnung der Stabspannungen nur für einen einzelnen Belastungsfall erforderlich ist, führt die Anwendung des bereits in § 46 besprochenen Maxwell-Mohr'schen Verfahrens, das sich auf die jetzt vorliegende Aufgabe ohne Weiteres übertragen lässt, am schnellsten zum Ziele. Diese Methode soll hier zunächst besprochen werden.

Man denke sich irgend einen Stab entfernt, der als der überzählige betrachtet werden kann. Der übrig bleibende, statisch bestimmte Rest des Trägers möge als das „Hauptnetz“ bezeichnet werden. Wir berechnen zunächst die Spannungen, die im Hauptnetze unter den gegebenen Lasten auftreten müssten, wenn der überzählige Stab wirklich fehlte. Dies ist nach den Lehren der früheren Abschnitte stets möglich, da das Hauptnetz nach Voraussetzung einen statisch bestimmten Träger bildet. Man wird also etwa einen Kräfteplan zeichnen, den wir den Kräfteplan  $T$  nennen wollen. Die aus ihm entnommene, zu irgend einem Stabe mit der Ordnungsnummer  $i$  gehörige Stabspannung sei mit  $T_i$  bezeichnet. Auch das Spannungsbild  $T$  gehört zu jenen, die wir für den ganzen statisch unbestimmten Träger vorher als möglich hingestellt hatten; es ist jenes, bei dem die Spannung des überzähligen Stabes willkürlich gleich Null gesetzt ist.

Hierauf betrachte man das Hauptnetz unter der Annahme, dass alle äusseren Lasten entfernt sind, während an den Endpunkten des überzähligen Stabes willkürlich Lasten angebracht werden, die gleich der Lasteinheit sind und jene Richtung haben, wie eine vom überzähligen Stabe auf seine Endpunkte ausgeübte Zugspannung. Diesem Belastungsfalle entsprechen Spannungen in den Stäben des statisch bestimmten Haupt-

netzes, die sich ebenfalls auf bekannte Art leicht ermitteln lassen. Man wird hierzu einen neuen Kräfteplan zeichnen, den wir den Kräfteplan  $u$  nennen wollen. Die im Stabe  $i$  jetzt auftretende Spannung sei mit  $u_i$  bezeichnet. Das Spannungsbild  $u_i$  ist von derselben Art wie ein System von Montirungsspannungen. Wirkt ferner längs der Richtungslinie des überzähligen Stabes nicht eine Zugspannung von der Lasteinheit, sondern eine Spannung beliebigen Vorzeichens vom Werthe  $X$ , so entsprechen ihr im Hauptnetze die Spannungen  $uX$ .

Aus den beiden Spannungsbildern  $T$  und  $uX$  lassen sich nun auch alle anderen zusammensetzen, die den Gleichgewichtsbedingungen an allen Knotenpunkten genügen. Es muss sich also auch jenes darunter befinden, das wir suchen und das mit dem Buchstaben  $S$  bezeichnet werden soll. Es wird sich nur darum handeln, der hierbei allein noch vorkommenden Unbekannten  $X$  den richtigen Werth zu ertheilen. Die wahre Spannung  $S_i$  im Stabe  $i$  wird sich also in der Form

$$S_i = T_i + u_i X \quad (64)$$

darstellen lassen.

Die elastische Längenänderung  $\Delta l_i$  des Stabes  $i$  folgt hieraus mit Benutzung der in Gl. (59) und (60) S. 320 eingeführten Stabconstanten  $r$  zu

$$\Delta l_i = r_i S_i = r_i (T_i + u_i X). \quad (65)$$

Um die Unbekannte  $X$  zu berechnen, wenden wir, wie schon in § 46, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten an. Wir beziehen diesen Satz auf irgend ein Spannungsbild von der Art  $u$ . Da es aber nicht nöthig ist, gerade das Spannungsbild  $u$  selbst zu nehmen, wollen wir, um dies klarer hervortreten zu lassen, annehmen, dass im überzähligen Stabe irgend eine Spannung  $C$  — also etwa eine Montirungsspannung — auftrete, die im Stabe  $i$  eine Spannung  $Cu_i$  zur Folge hat. Aeussere Lasten, abgesehen von Auflagerkräften, die dadurch hervorgerufen werden können, kommen in diesem Spannungsbilde nicht vor.

Die Spannungen  $Cu$  stehen also an allen Knotenpunkten

unter sich, bzw. an den Auflagerpunkten mit den dort auftretenden Auflagerkräften im Gleichgewichte. Denken wir uns nun den Knotenpunkten, also den Angriffspunkten dieser Kräfte, beliebige (virtuelle) Verschiebungen ertheilt, so ist die Summe der von ihnen geleisteten Arbeiten gleich Null. Wir denken uns, wie schon bei der früheren ähnlichen Betrachtung in § 46, diese Arbeitsgleichung für jeden Knotenpunkt angeschrieben und hierauf alle Gleichungen addirt. Dabei können wir wieder je zwei Glieder, die sich auf dieselbe Stabspannung beziehen, zu einem Gliede von der Form

$$- Cu \cdot \Delta l$$

vereinigen.

Hierbei ist es zunächst gleichgültig, welche virtuellen Verschiebungen wir voraussetzen wollen, wenn nur  $\Delta l$  im vorhergehenden Ausdrucke die dazu gehörige Stabverlängerung angibt. Es steht uns daher jedenfalls auch frei, jene Knotenpunktswege als die virtuellen Verschiebungen anzusehen, die bei der Formänderung des statisch unbestimmten Trägers unter dem Einflusse der gegebenen Lasten in Wirklichkeit zu Stande kommen. Die hierbei auftretenden Stabverlängerungen sind aber durch Gl. (65) — abgesehen von der darin noch vorkommenden Unbekannten  $X$  — bereits festgestellt. Wir können also die von den Stabspannungen herrührenden Glieder der Arbeitsgleichung ohne Weiteres anschreiben; zum Stabe  $i$  z. B. gehört das Glied

$$- Cu_i r_i (T_i + u_i X).$$

Es bleiben nur noch die Arbeiten der Auflagerkräfte übrig, die zum Spannungsbilde  $Cu$  gehören. Diese Arbeiten sind aber gleich Null, weil sich die festgehaltenen Auflagerpunkte überhaupt nicht bewegen, während bei den längs Auflagerbahnen verschieblichen, der Weg senkrecht zur Kraft-richtung steht. Die Arbeitsgleichung reducirt sich daher auf

$$- \sum Cur(T + uX) = 0. \quad (66)$$

Die Summirung hat sich auf alle Stäbe mit Einschluss

des überzähligen zu erstrecken; für ihn ist, wie aus der Ableitung hervorgeht,  $T = 0$  und  $u = +1$  zu setzen.

Das Vorzeichen vor der Summe ist ohne Bedeutung und auch der vorher eingeführte, unbestimmt gelassene Faktor  $C$ , der in allen Gliedern wiederkehrt, kann wieder gestrichen werden. Die Gleichung enthält daher nur die eine Unbekannte  $X$ . Die Summe lässt sich in zwei Glieder trennen und aus der so entstehenden Gleichung

$$\sum urT + X\sum u^2r = 0$$

erhält man durch Auflösung nach  $X$

$$X = -\frac{\sum urT}{\sum u^2r}. \quad (67)$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst. Denn alle in den Summen vorkommenden Glieder können auf Grund der beiden Kräftepläne  $T$  und  $u$  und der Angaben über die Längen und Querschnitte der Stäbe ohne Weiteres zahlenmässig angegeben werden. Wie gross man den Elasticitätsmodul des Materials annehmen will, bleibt sich übrigens in diesem Falle gleichgültig, da  $E$  nach Einsetzen des Werthes von  $r$  aus Gl. (59) in jedem Gliede von Zähler und Nenner in gleicher Weise auftritt und sich daher forthebt.

Nachdem  $X$  bekannt ist, folgt auch die Spannung jedes anderen Stabes nach Gl. (64).

Bisher nahm ich an, dass ein überzähliger Stab herausgenommen werden soll, um zum statisch bestimmten Hauptnetze zu gelangen. Man kann aber anstatt dessen ebensogut auch eine überzählige Auflagerbedingung beseitigen. In diesem Falle ist unter  $X$  die Componente des Auflagerdruckes zu verstehen, die durch den beseitigten Auflagerzwang in Wirklichkeit hervorgerufen wird.

Man überzeugt sich leicht, dass die vorhergehenden Entwicklungen auch für diesen Fall ohne Aenderung gültig bleiben. Man nehme z. B. an, dass es sich um einen Fachwerkbogenträger handle, der aus einem statisch bestimmten Fachwerke durch feste Auflagerung beider Endknotenpunkte

hervorgegangen ist. Der festen Auflagerung beider Endpunkte entsprechen vier Auflagerbedingungen, also eine zu viel. Anstatt nun einen Stab herauszunehmen und dadurch zu einem Hauptnetze zu gelangen, das einen Bogenträger mit drei Gelenken darstellt, kann man auch eine Auflagerbedingung entfernen, nämlich voraussetzen, dass der Träger nur am einen Ende fest, am anderen auf einer horizontalen Auflagerbahn verschieblich aufgelagert sei. Als „Hauptnetz“ ist jetzt das als Balkenträger aufgelagerte Fachwerk anzusehen. Man zeichne den Kräfteplan  $T$  für die im Balkenträger durch die gegebenen Lasten hervorgerufenen Stabspannungen. Dann bringe man als einzige Last eine horizontale Kraft von der Lasteinheit an dem auf dem Rollenlager sitzenden Auflagerpunkte an, die auf den festen Auflagerpunkt zu gerichtet ist. Dieser Last entspricht ein horizontaler Auflagerdruck von derselben Grösse am festen Auflager. Man zeichne den Kräfteplan  $u$  für die hierdurch hervorgerufenen Stabspannungen im Balkenträger. Bezeichnet dann  $X$  den in Wirklichkeit bei dem statisch unbestimmten Träger unter den gegebenen Lasten auftretenden Horizontal Schub, so werden die Stabspannungen  $S$  durch Gl. (64) angegeben und  $X$  selbst findet man durch dieselben Ueberlegungen wie vorher gleich dem durch Gl. (67) angegebenen Werthe.

§ 50. Träger mit zwei oder mehr überzähligen Stäben.

Allzugross ist die Zahl der überzähligen Stäbe nicht leicht bei den in der Praxis angewendeten Trageconstructionen, für die man solche Rechnungen auszuführen hat. Träger mit zwei oder drei überzähligen Stäben kommen indessen noch öfters vor. Ich werde hier zunächst einen Träger mit zwei überzähligen Stäben behandeln; man sieht nachher leicht ein, wie sich das Verfahren gestaltet, wenn die Zahl der überzähligen Stäbe (oder Auflagerbedingungen) noch grösser ist.

Abb. 133 zeigt ein Beispiel für einen zweifach statisch unbestimmten Bogenträger. Denkt man sich die Stäbe  $X$  und  $Y$  herausgenommen, so bleibt ein Hauptnetz übrig, das einen