Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 48. Der Verschiebungsplan

Die Anwendung von Gl. (62) auf die durch die Last P verursachte Formänderung des Trägers liefert nun, wenn wir diese Uebereinstimmungen beachten,

$$y = \frac{1}{Q} \sum r S' T' = \frac{1}{Q} \sum r T S.$$

Dabei zeigt sich, dass die in den Ausdrücken für x und y vorkommenden Summen einander gleich sind. Man hat daher

$$\frac{x}{y} = \frac{Q}{P} \tag{63}$$

oder, um auf die einfachste Form des Satzes zu kommen,

$$x = y \quad \text{für} \quad P = Q.$$

Die Leser des dritten Bandes wissen, dass der Satz nicht auf statisch bestimmte Fachwerkträger beschränkt ist, sondern für beliebig gestaltete Körper oder Systeme von Körpern gilt, die dem Hooke'schen Gesetze von der Verhältnissgleichheit zwischen Formänderungen und Spannungen gehorchen. Es schien aber nützlich, hier einen von dem dort gegebenen ganz abweichenden Beweis des Satzes vorzuführen, der sich unmittelbar auf Fachwerkträger bezieht, weil in der Folge von dem Satze gerade in dieser Form noch ein wichtiger Gebrauch gemacht werden wird.

§ 48. **Der Verschiebungsplan.**

Die schon in § 46 behandelte Aufgabe, die Verschiebungen der Knotenpunkte eines Trägers zu ermitteln, die zu gegebenen Längenänderungen Δl der Fachwerkstäbe gehören, kann auch, wie zuerst der französische Ingenieur Williot zeigte, auf rein graphischem Wege gelöst werden. Die Lösung lässt sich auf die wiederholte Anwendung einer Construction zurückführen, die selbst die Lösung einer einfacheren Aufgabe bildet, die sich wie folgt aussprechen lässt:

Man kennt bereits die Verschiebungen von zwei Ecken eines Stabdreiecks und überdies die Längenänderungen der zu diesem Dreiecke gehörigen Stäbe;

man soll die Verschiebung der dritten Ecke bestimmen.

Um zur Lösung zu gelangen, wollen wir zunächst von dem Umstande absehen, dass die Knotenpunktswege sehr klein im Verhältnisse zu den Stablängen sind. In diesem Falle gelingt die Lösung schon mit den einfachsten Hülfsmitteln, wie aus Abb. 129 zu erkennen ist. In dieser Abbildung sind I, II, III die ursprünglichen Lagen der Knotenpunkte des Stabdreiecks und die zwischen ihnen gezogenen Linien geben die Stäbe vor der Formänderung an. Gegeben sind nach Voraussetzung die Verschiebungen $\mathfrak{v}_{I}$ und $\mathfrak{v}_{II}$ der Knotenpunkte I und II und damit haben wir auch, wenn wir diese Strecken abtragen, die Lagen I′ und II′ dieser Knotenpunkte nach der Formänderung.

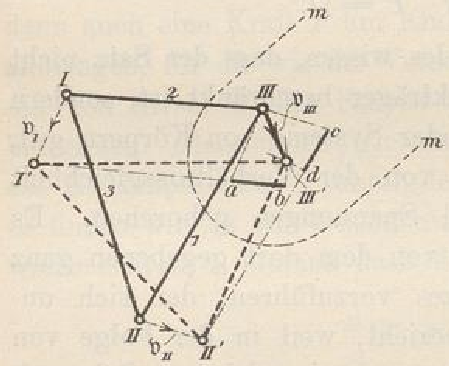

Abb. 129.

Um auch die neue Lage III′ des Punktes III zu erhalten, brauchten wir nur von I′ und II′ aus zwei Kreisbögen mit den jetzt zutreffenden Längen der Verbindungsstäbe 1 und 2 zu schlagen; der Schnittpunkt würde III′ und die Verbindungslinien von III nach III′ die gesuchte Verschiebung $\mathfrak{v}_{III}$ liefern.

Wir wollen aber, um auf eine Construction zu kommen, die sich auch für den Fall sehr kleiner Knotenpunktswege mit hinreichender Genauigkeit ausführen lässt, anstatt dessen zunächst die ursprüngliche Länge des Stabes 2 von I′ aus, zugleich auch in der ursprünglichen Richtung des Stabes 2 abtragen. Wir kommen dadurch auf den Punkt a. Dann tragen wir die Längenänderung Δl_2 des Stabes 2 von a aus ab, gleich ab. In der Abbildung ist angenommen, dass sich der Stab 2 verlängere; im anderen Falle wäre ab in entgegengesetzter Richtung von a aus abzutragen. Erst durch den so gewonnenen Punkt b ziehen wir nun den Kreisbogen vom

Mittelpunkte I′ aus. Wie man sieht, handelt es sich bei dieser Vorschrift nur um ein genauer umschriebenes Verfahren, wie die Länge des Stabes 2 nach der Formänderung in die Zeichnung eingetragen werden soll.

Hierauf verfahren wir ebenso mit dem Stabe 1. Dessen ursprüngliche Länge wird von II′ aus in der ursprünglichen Richtung abgetragen, wodurch wir zum Punkte c gelangen, worauf die Längenänderung $\Delta l_1 = cd$ von c aus auf dieser Linie angesetzt wird. In der Abbildung ist angenommen, dass sich der Stab 1 verkürzt habe. Durch den auf diese Weise gefundenen Punkt d legen wir hierauf den Kreisbogen dIII′ vom Mittelpunkte II′ aus. Der Schnittpunkt beider Kreisbögen liefert den Punkt III′.

Der wirklichen Ausführung des bis dahin beschriebenen Verfahrens steht freilich das Hinderniss im Wege, dass die Knotenpunktswege und die Aenderungen der Stablängen so klein sind, dass sich das Dreieck I′ II′ III′ vom Dreiecke I II III kaum oder gar nicht auseinander halten lässt. Im Grunde genommen besteht indessen die Schwierigkeit nur darin, dass in der Zeichnung neben sehr kleinen Strecken auch sehr viel grössere Strecken vorkommen. Denn so klein auch die Knotenpunktswege und die Stabverlängerungen sein mögen — und selbst wenn sie wirklich unendlich klein wären — lassen sie sich bei einer passenden Wahl des Maassstabs doch in zweckmässiger Grösse auftragen. Die Stablängen selbst kann man dann freilich nicht in dieselbe Zeichnung aufnehmen. Dies ist aber auch gar nicht nöthig. Man denke sich nämlich den durch die Linie mm umgrenzten Theil der Figur in der Umgebung des Knotenpunktes III von dem Reste abgeschnitten. Schon dieser Abschnitt der Figur genügt vollständig, um den Knotenpunktsweg von III zu ermitteln. Man kann nämlich diesen Theil der ganzen Figur in einem beliebigen Maassstabe auftragen, ohne dazu den sehr viel grösseren Rest nöthig zu haben. Zugleich sind alle Strecken in diesem Theile klein von der Ordnung der Knotenpunktswege und der Stabverlängerungen, so dass kein Hinderniss besteht, den Maassstab so zu wählen, dass alle Strecken eine für das Auftragen oder Abmessen mit dem Zirkel bequeme Grösse erlangen.

Freilich braucht man eigentlich streng genommen die Punkte I′ und II′, um von ihnen aus die Kreisbögen von b und d nach III′ zu schlagen. Aber gerade der Umstand, dass die Knotenpunktswege sehr klein im Verhältnisse zu den Stablängen sind, der uns zuerst störend im Wege stand, hilft uns jetzt zur Ueberwindung dieser Schwierigkeit. Ein kleiner Kreisbogen, der zu einem grossen Halbmesser gehört, kann nämlich genau genug als gradlinig angenommen werden. Die Richtung der das Bogenelement ersetzenden Strecke muss natürlich senkrecht zum Halbmesser stehen und dessen Richtung ist in dem Abschnitte der Figur ohnehin schon durch die Strecke ab bezw. cd vertreten.

In Abb. 130 ist der in Frage kommende Theil von Abb. 129 noch einmal besonders herausgezeichnet. Man überzeugt sich leicht, dass dieser Theil für sich gezeichnet werden kann, ohne dass man zuvor Abb. 129 entworfen zu haben braucht. Von einem beliebigen Punkte, der hier der Uebereinstimmung mit Abb. 129 wegen, mit III bezeichnet ist, den man aber sonst den Pol des Verschiebungsplanes nennt, trage man zunächst die gegebenen Knotenpunktswege $\mathfrak{v}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{v}_{\mathrm{II}}$ in einem passend gewählten Maassstabe ab. Dadurch erhält man die vorher mit a und c bezeichneten Punkte. Hieran schliessen sich die Stabverlängerungen Δl_1 und Δl_2, die parallel zu den gegebenen Stabrichtungen zu ziehen sind. Hiermit hat man die Punkte d und b und es fehlen nur noch die Kreisbögen bIII′ und dIII′. In Abb. 130 mussten diese wirklich als Kreisbögen gezogen werden, weil diese Abbildung aus Abb. 129 losgetrennt war, in der die Knotenpunktswege von gleicher Grössenordnung mit den Stablängen angenommen wurden. Hiermit hängt es auch zusammen, dass wir beim Uebergange von Abb. 129 zu 130 keine Veranlassung hatten, den Maassstab zu vergrössern. In jenen Fällen, für die man die Verschiebungspläne thatsächlich zu construiren hat, ist aber Abb. 130 in weit grösserem Maass-

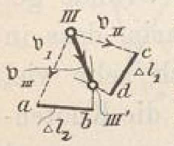

Abb. 130.

stabe als Abb. 129 zu zeichnen und die Kreisbögen bIII′ und dIII′ gehören dann zu Halbmessern von vielen Metern Länge. Es genügt daher, bIII′ als gerade Linie senkrecht zu ab und ebenso dIII′ senkrecht zu cd zu ziehen. Die Verbindungslinie vom Pole des Verschiebungsplans zum Schnittpunkte III′ der beiden Graden gibt die gesuchte Verschiebung $\mathfrak{v}_{III}$ des Knotenpunktes III nach Grösse und Richtung an.

Die einfachere Aufgabe, die wir uns zunächst stellten, ist hiermit gelöst und es bleibt nur noch zu zeigen, wie man durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens auch die Knotenpunktsverschiebungen in einem beliebigen „einfachen“ Fachwerkträger, die zu gegebenen Stabverlängerungen gehören, ermitteln kann. Bei einem „nicht einfachen“ Fachwerkträger reicht man mit diesem Verfahren freilich nicht aus. Man kann zwar auch dann die Knotenpunktsverschiebungen und zwar durch entsprechende weitere Ausbildung des schon in § 36 besprochenen Verfahrens oder auch auf andere Art verfolgen. Da aber die einfachen Träger die Regel bilden und man sich bei den anderen nöthigenfalls auch durch das schon beschriebene Maxwell-Mohr'sche Verfahren helfen kann, das auch für sie ohne Weiteres anwendbar ist, soll hier nur von den Verschiebungsplänen für die einfachen Träger die Rede sein.

Hierzu bemerke ich noch, dass es für die Construction des Verschiebungsplans gleichgültig ist, ob der Träger statisch bestimmt oder unbestimmt ist, falls man nur die Verlängerungen aller Stäbe bereits kennt. Man kann dann die überzähligen Stäbe bei der Construction ganz unberücksichtigt lassen. Nachher muss sich von selbst zeigen, dass die Verlängerungen der überzähligen Stäbe mit den im Verschiebungsplane gefundenen Wegen ihrer Endknotenpunkte in Uebereinstimmung stehen.

In Abb. 131^{a} ist ein Balkenträger gezeichnet, von dem die durch Schattenstriche hervorgehobenen Stäbe bei dem Belastungsfalle, der zu der jetzt zu untersuchenden Formänderung führt, gedrückt, die anderen gezogen sein sollen. Ich nehme an, dass die Stabspannungen durch Zeichnen eines Kräfteplans

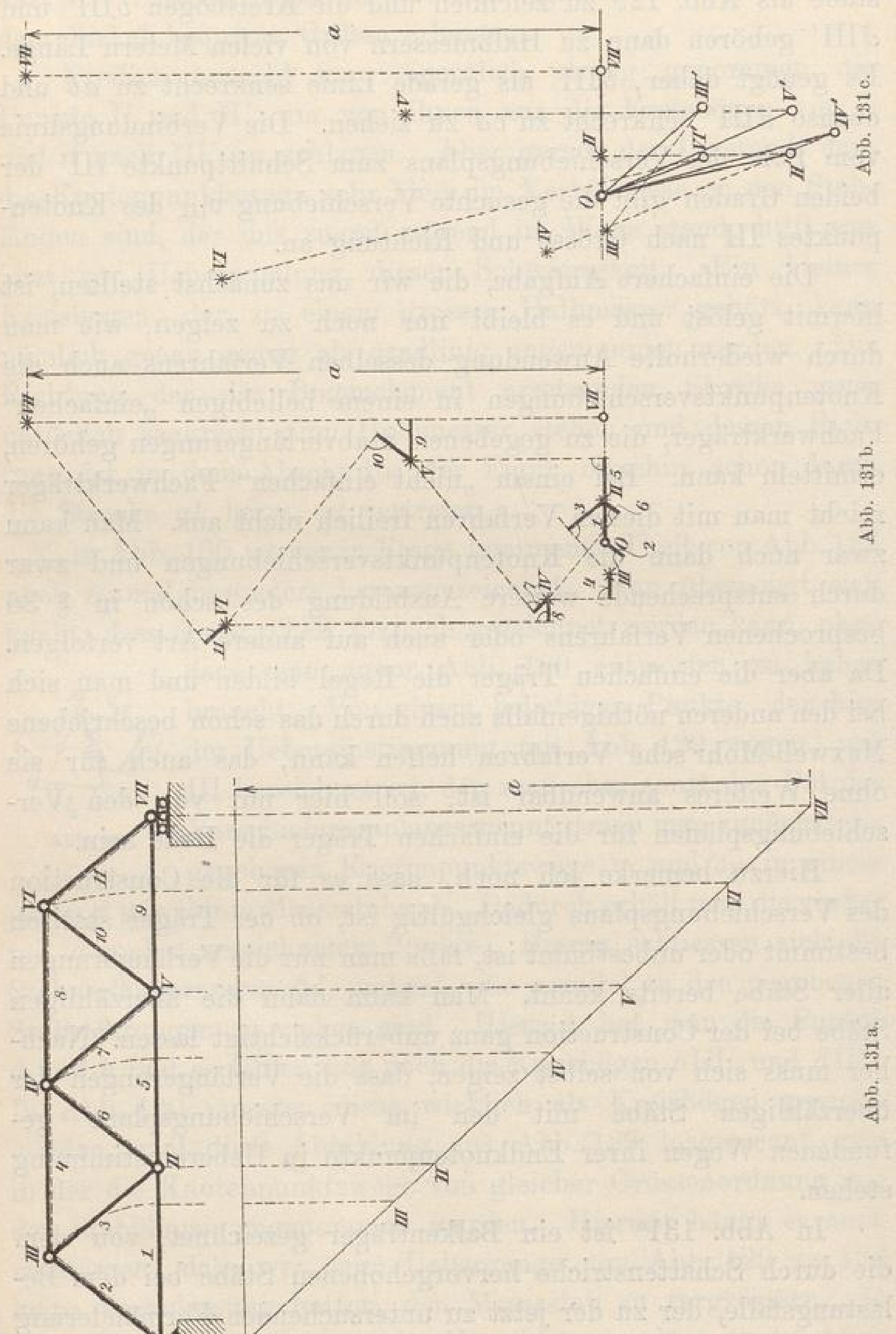

Abb. 131a.

Abb. 131b.

Abb. 131c.

und die Stabverlängerungen Δl nach Gl. (60) bereits berechnet seien.

Den Verschiebungsplan zeichnet man nebenan als besondere Figur (Abb. 131[b]) so etwa wie einen Kräfteplan. Der Pol, von dem aus die Knotenpunktswege nach Grösse und Richtung aufzutragen sind, ist in der Abbildung mit dem Buchstaben O bezeichnet. Die Stabverlängerungen, die in passender Vergrösserung angegeben werden, sind durch ausgezogene kleine Strecken dargestellt und nur mit den Nummern der zugehörigen Stäbe bezeichnet. Die gestrichelten Linien des Verschiebungsplanes bilden den Ersatz für die in den vorhergehenden Auseinandersetzungen besprochenen Kreisbögen.

Vor Allem ist nun auf eine kleine Schwierigkeit hinzuweisen, auf die man beim Anfange der Construction stösst. Man beginnt nämlich vom festen Auflagerpunkte I her. Nun weiss man zwar, dass dessen Verschiebung gleich Null ist. Von den Verschiebungen der beiden anderen Ecken II und III des ersten Stabdreiecks I, II, III weiss man aber noch nichts. Es fehlt also hier eine der Voraussetzungen, von denen wir bei der Lösung der einfacheren Aufgabe für das Stabdreieck ausgingen.

Man hilft sich damit, dass man vorläufig darauf verzichtet, die Knotenpunktswege sofort in ihrer wahren Richtung und Grösse zu erhalten. Man denkt sich nämlich mit dem Träger zunächst nur die Aenderung der Gestalt vorgenommen, während man die Lage, in die er infolge dieser Gestaltänderung übergeht, einstweilen als unbestimmt betrachtet. Die Lage, die der Träger nachher einnimmt, wird durch die Auflagerbedingungen vorgeschrieben. Nun kann man zwar die dem festen Auflagerpunkte vorgeschriebenen Bedingungen sofort verwerthen, indem man seinen Knotenpunktsweg gleich Null setzt. Die Auflagerbedingung am anderen Ende, durch die der Knotenpunkt VII auf seiner horizontalen Auflagerbahn gehalten wird, lässt sich aber von Anfang an nicht benutzen, wenn man die Construction des Verschiebungsplanes vom linken Trägerende her beginnt. Man sieht daher von der Erfüllung dieser Auflagerbedingung einstweilen ganz ab und denkt sich den Träger, nachdem er die ihm auferlegte Gestaltänderung erfahren hat, in irgend einer anderen Lage gegeben.

Diese ganz willkürlich auszuwählende Lage kann z. B. dadurch näher bezeichnet werden, dass man sich die Richtung des Stabes 1 festgehalten denkt. In diesem Falle kann sich der Knotenpunkt II nur in horizontaler Richtung verschoben haben.

Hiermit ist — freilich unter Aufopferung der unmittelbaren Erreichung des gesteckten Zieles — die vorher erwähnte Schwierigkeit beim Anfange des Verschiebungsplanes gehoben. Wir tragen die Längenänderung Δl_1 oder kurz 1 des Stabes 1 vom Pole des Verschiebungsplanes horizontal nach rechts hin ab. Der Stab ist nämlich nach Voraussetzung gezogen und der Knotenpunkt II entfernt sich daher von I, d. h. er bewegt sich nach rechts hin. An den Endpunkt der Strecke 1 schreiben wir II.

Nun steht der Construction des Verschiebungsweges von III nach dem vorher besprochenen Verfahren kein Hinderniss mehr im Wege. Wir tragen von II aus Δl_3 nach links oben hin ab, da der Stab 3 gezogen ist, der Knotenpunkt III sich also in Folge der Stabverlängerung von II entfernt, d. h. nach links oben hin bewegt. Ebenso tragen wir Δl_2 von O aus nach links unten hin ab, weil Stab 2 gedrückt ist, sich also verkürzt. Die durch die Endpunkte von Δl_3 und Δl_2 gezogenen Senkrechten, die zum Ersatze der betreffenden Kreisbögen dienen, schneiden sich im Punkte III (entsprechend dem Punkte III′ nach der Bezeichnung in Abb. 130) des Verschiebungsplanes. Die Strecke vom Pole O nach III gibt den Verschiebungsweg des Knotenpunktes III an für den Uebergang des Trägers in seine neue Gestalt, aber freilich nicht zugleich in die richtige Lage, sondern in die anstatt deren willkürlich gewählte.

Nachdem III im Verschiebungsplane gefunden ist, sucht man den Punkt IV auf. Dieser Knotenpunkt ist durch die Stäbe 4 und 6 an III und II angeschlossen. Die Verschiebungswege von III und II sind schon im Verschiebungsplane enthalten. Wir brauchen also nur an III die Stabverlängerung Δl_4 und an II Δl_6 anzutragen und durch die Endpunkte dieser Strecken Senkrechte zu ziehen, um IV zu erhalten. Hierbei ist nur darauf zu achten, dass die Stäbe 4 und 6 nach Voraussetzung gedrückt sind, dass sich also IV den Knotenpunkten II und III nähert. Demnach ist die Strecke 4 von III aus nach links hin, 6 von II aus nach links unten hin abzutragen gewesen.

In derselben Weise findet man dann auch der Reihe nach die Punkte V, VI und VII des Verschiebungsplanes. Man thut zwar gut, sich jeden Schritt, der hierzu führt, wieder im Einzelnen zu überlegen und dabei namentlich auf den Sinn zu achten, in dem die Δl jedesmal anzuschliessen sind. Es ist aber nicht nöthig, die Beschreibung fortzusetzen, da ich dabei immer nur von Neuem dieselben Worte zu wiederholen hätte.

Nachdem man bis zum rechten Auflagerpunkte VII gelangt ist, sieht man nun auch, dass man mit der willkürlichen Annahme, der Stab 1 ändere seine Richtung nicht, von der man ausgegangen war, nicht das Rechte getroffen hat. Darum werden aber unsere Ergebnisse noch nicht werthlos; sie bedürfen nur einer Verbesserung, die leicht an ihnen anzubringen ist.

Jedenfalls haben wir nämlich Knotenpunktsverschiebungen gefunden, die, wenn sie wirklich vorgenommen werden, den Träger in jene Gestalt überführen, die er in Folge der Stabverlängerungen thatsächlich annimmt. Wir brauchen also nur noch eine Lagenänderung ohne Gestaltänderung vorzunehmen, nämlich den Träger nachträglich um den festen Auflagerpunkt I so lange zu drehen, bis der andere Auflagerpunkt VII in die ihm vorgeschriebene Auflagerbahn gelangt. Hierbei beschreibt VII einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt I ist. Da dieser Kreisbogen aber nur sehr klein im Verhältnisse zum Halbmesser ist, genügt es, ihn im Verschiebungsplane durch eine gerade Strecke zu ersetzen, die zur Richtung des Halbmessers von I nach VII senkrecht steht. Diese Strecke ist in Abb. 131^b

VII, VII′ oder a bezeichnet; sie reicht vom Punkte VII bis zu der durch den Pol O gezogenen Horizontalen.

Erst die Linie OVII′ gibt den wahren Verschiebungsweg des Knotenpunktes VII nach Grösse und Richtung in dem gewählten Maassstabe an. Aus der Figur folgt, dass dieser Weg gleich der Summe der Stabverlängerungen Δl_1, Δl_5 und Δl_9 ist. Dies war auch von Anfang an vorauszusehen, da sich VII von dem festen Auflager um den Betrag der elastischen Dehnung des ganzen Untergurts entfernen muss.

Beim Zurückdrehen des seiner Gestalt nach unveränderlichen Trägers aus der zuerst willkürlich gewählten Lage in jene, die er in Wirklichkeit einnehmen muss, beschreiben auch alle anderen Knotenpunkte Kreisbögen um I als Mittelpunkt. Auch die hierdurch bedingten Verschiebungswege können wegen ihrer Kleinheit (im Verhältnisse zu den Halbmessern) durch gerade Linien im Verschiebungsplane ersetzt werden, die zu den aus der Trägerfigur in Abb. 131[a] zu entnehmenden Halbmesserrichtungen senkrecht stehen. Um ihre Grössen zu finden, bedenke man, dass alle diese Kreisbögen zu gleichen Centriwinkeln gehören, nämlich jeder zu einem Centriwinkel, der gleich der Drehung ist, die wir mit der unveränderlichen Trägerfigur vornehmen müssen, um VII auf seine Auflagerbahn zurückzuführen. Die bei der Drehung zurückgelegten Wegestrecken verhalten sich daher wie die Halbmesser der Kreisbögen und da der Weg von VII bereits gleich der Strecke a gefunden ist, können auch die Längen der übrigen Wege sofort ermittelt werden.

Man trage etwa, wie es in Abb. 131[a] geschehen ist, die Strecke a aus dem Verschiebungsplane von VII aus nach abwärts auf, schlage die Entfernung der einzelnen Knotenpunkte von I auf die Horizontale durch I herab und ziehe von da aus Parallelen zu a bis zur Verbindungslinie von I mit dem Endpunkte von a. Die Längen dieser Parallelen geben die Grössen der Verschiebungswege der zugehörigen Knotenpunkte beim Zurückdrehen an.

Man braucht jetzt nur noch die nach Richtung und Grösse bekannten Verschiebungswege an die zugehörigen Punkte des Verschiebungsplanes anzusetzen, um sofort zu jenen Punkten zu gelangen, deren Lage zum Pole die wahre Verschiebung nach Grösse und Richtung angibt. Um die Deutlichkeit der Figur nicht zu beeinträchtigen, ist dies in Abb. 131^b selbst nicht ausgeführt worden. Vielmehr sind die richtigen Lagen der Punkte im Verschiebungsplane in Abb. 131^c besonders herausgezeichnet worden. Eigentlich hat man sich Abb. 131^c mit Abb. 131^b zu einer einzigen Figur übereinandergedeckt vorzustellen, so nämlich, dass sich die Pole O in beiden Abbildungen decken.

Im Uebrigen ist das Verfahren noch mancher Abänderungen fähig. Es ist z. B. nicht nöthig, bei der Construction des Verschiebungsplanes vom festen Auflager her zu beginnen. Man kann sich auch irgend einen Knotenpunkt in der Mitte und einen von ihm ausgehenden Stab der Richtung nach vorläufig festgehalten denken und von hier aus den Verschiebungsplan nach beiden Seiten hin construiren. Dann findet man freilich, dass keiner der Auflagerpunkte die ihm vorgeschriebenen Auflagerbedingungen erfüllt. Durch Drehung um einen Pol, dessen Lage leicht zu ermitteln ist, kann man aber nachträglich den seiner Gestalt nach bereits veränderten und während der Drehung daher unveränderlichen Träger in jene Lage zurückbringen, die durch die Auflagerbedingungen vorgeschrieben ist.

Dieses Verfahren hat den Vorzug vor dem vorher beschriebenen, dass der Verschiebungsplan einen kleineren Umfang annimmt und dass man daher bei einem gegebenen Raume der Zeichenfläche den Maassstab für das Auftragen der Stabverlängerungen und der Verschiebungen grösser wählen kann, wodurch die Genauigkeit erhöht wird. Man bemerkt nämlich schon an dem einfachen Beispiele, das vorher behandelt wurde, dass der Raum, den der Verschiebungsplan einnimmt, in immer stärkerem Verhältnisse anwächst, je weiter man vorschreitet. Ich sehe indessen davon ab, ein Beispiel für die Construction des Verschiebungsplanes aus der Mitte her vorzuführen, da der Anfänger am besten thut, auf diese „Handwerksvortheile“ zunächst zu verzichten und sich mit der Sache unter den einfachsten Bedingungen vertraut zu machen. Wer erst einige Verschiebungspläne selbst entworfen hat, findet bald selbst heraus, wie er die Arbeit durch eine geschickte Anordnung erleichtern und verbessern kann.

Nur darauf möchte ich noch hinweisen, dass man auch dann, wenn man den Verschiebungsplan vom festen Auflager her construirt, eine Verbesserung dadurch herbeiführen kann, dass man den Stab 1 seiner Richtung nach nicht festhält, sondern anstatt dessen einstweilen willkürlich annimmt, dass sich der Knotenpunkt II in irgend einer Richtung nach rechts abwärts verschoben habe. Hat man schon von früheren Erfahrungen her eine ungefähre Vorstellung davon, in welcher Richtung sich der Knotenpunkt II etwa in Wirklichkeit verschieben wird, so wird sich der Verschiebungsplan hierdurch auf einen wesentlich kleineren Raum zusammendrängen lassen, als unter der früheren Annahme. Das Zurückdrehen am Schlusse ist natürlich in diesem Falle genau so auszuführen, wie vorher. Die Construction ändert sich nun insofern ab, als man im Anfange beim Auftragen von II ausser dem horizontalen Wege, der nach wie vor gleich Δl_1 bleiben muss, nach Gutdünken auch noch einen beliebigen Weg von II in vertikaler Richtung voraussetzt.

Schliesslich mache ich noch darauf aufmerksam, dass es natürlich auch frei steht, die einzelnen Polygone, aus denen sich der Verschiebungsplan zusammensetzt, in die Trägerfigur selbst einzutragen, so dass an jeden Knotenpunkt jenes Polygon angesetzt wird, das vorher dazu diente, die Lage des dem Knotenpunkte entsprechenden Punktes des Verschiebungsplans aufzusuchen. Mancher wird dieses Verfahren vielleicht für anschaulicher halten und es soll daher durch eine besondere Figur, die sich ebenfalls auf das vorher behandelte Beispiel bezieht, erläutert werden.

Zugleich sind hierbei noch einige Abänderungen getroffen, die sich unter diesen Umständen als zweckmässig erweisen. Die Knotenpunktsverschiebungen sind in Abb. 132 von jedem

Knotenpunkte aus in vergrössertem Maassstabe abgetragen und in der Zeichnung durch starke Striche hervorgehoben. Zuerst trägt man $\mathfrak{v}_{II}$ vom Knotenpunkte II aus in beliebiger Richtung ab, indem man nur dafür sorgt, dass die Horizontalcomponente von $\mathfrak{v}_{II}$ gleich Δl_1 (in der Abbildung Δ_1 geschrieben) ist. Dann projicirt man $\mathfrak{v}_{II}$ auf die Richtung von 3 und trägt die Projektion v'_{II} von III aus in gleicher Richtung auf 3 ab. Wenn der Stab 3 seine Länge nicht änderte, müsste der Knotenpunkt III nach der Verschiebung auf der durch den Endpunkt von v'_{II} gezogenen Senkrechten liegen. Da aber 3 gezogen ist und sich verlängert, muss die Projektion von III einen grösseren Abstand von der Projektion von II auf die

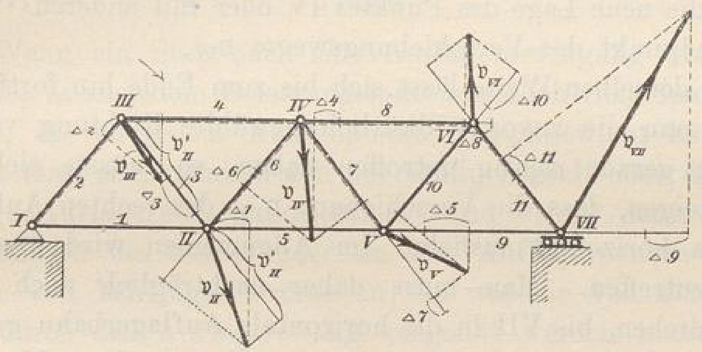

Abb. 132.

Richtung von 3 haben. Man hat daher Δ_3 vom Endpunkte von v'_{II} aus nach dem Knotenpunkte III hin abzutragen und durch den Endpunkt eine Senkrechte zu ziehen, auf der der Endpunkt der Verschiebung $\mathfrak{v}_{III}$ enthalten sein muss. Ferner nähert sich der Knotenpunkt III dem festen Auflagerpunkte I wegen der Verkürzung des Stabes 2. Man trägt daher Δl_2 von III aus nach I hin ab und zieht durch den Endpunkt eine Senkrechte zur Stabrichtung. Der Schnittpunkt von ihr mit der vorigen Senkrechten liefert den Endpunkt der Verschiebung $\mathfrak{v}_{III}$.

Um zur Verschiebung des Knotenpunktes IV zu gelangen, der mit II und III durch die Stäbe 6 und 4 verbunden ist, projicirt man zunächst $\mathfrak{v}_{II}$ und $\mathfrak{v}_{III}$ auf die Richtungen der

Verbindungsstäbe 6 und 4. Die beiden Projektionen trägt man am Knotenpunkte IV im gleichen Sinne auf den Stabrichtungen ab. Hätten sich die Längen der Verbindungsstäbe nicht geändert, so müsste der Knotenpunkt IV nach der Formänderung auf den durch die Endpunkte jener Strecken gezogenen Senkrechten liegen. Um auch die Längenänderungen zu berücksichtigen, tragen wir Δ_4 an die eine Strecke nach links hin, Δ_6 an die andere nach links unten hin an, weil die Stäbe 4 und 6 nach Voraussestzung gedrückt sind und der Knotenpunkt IV sich daher den Knotenpunkten II und III nähert. Wenn wir jetzt Senkrechten zu den Stabrichtungen an den Endpunkten von Δ_4 und Δ_6 errichten, erhalten wir als Schnittpunkt die neue Lage des Punktes IV oder mit anderen Worten den Endpunkt des Verschiebungsweges $\mathfrak{v}_{IV}$.

In derselben Weise lässt sich bis zum Ende hin fortfahren. Sollte man die zuvor willkürlich gewählte Richtung von $\mathfrak{v}_{II}$ zufällig gerade richtig getroffen haben, so müsste sich dies darin zeigen, dass die Verschiebung $\mathfrak{v}_{VII}$ des rechten Auflagerpunktes horizontal ausfiele. Im Allgemeinen wird dies aber nicht zutreffen. Man muss daher nachträglich noch um I zurückdrehen, bis VII in die horizontale Auflagerbahn gelangt. Dies kann wieder so wie vorher ausgeführt werden. Man setzt an den Endpunkt jeder Strecke $\mathfrak{v}$ den bei der Drehung beschriebenen Weg an. Freilich darf man hierbei nicht etwa wirklich einen Kreisbogen aus dem Punkte I schlagen. Da alle Stabverlängerungen und Knotenpunktswege in viel grösserem Maassstabe über die in kleinem Maassstabe gezeichnete Trägerfigur gedeckt sind, lassen sich die Theile des Verschiebungsplans nicht in unmittelbare Beziehung zu den Theilen der Trägerfigur setzen. Jener Punkt I, von dem aus man den Kreisbogen zu ziehen hätte, liegt vielmehr viel weiter ab, so wie es der Maassstab des Verschiebungsplans im Gegensatze zum Maassstabe der Trägerfigur erfordert. Man ersetzt daher, wie schon früher, den Kreisbogen durch eine zum Radius senkrecht gezogene Gerade. Die Richtung des Radius wird hierbei durch die vom Knotenpunkte I der Trägerfigur gezogene Verbindungslinie richtig angegeben. — Um die Deutlichkeit der Figur nicht durch Hinzufügung weiterer Linien zu beeinträchtigen, ist von der Ausführung der Zurückdrehung in Abb. 132 abgesehen worden. Natürlich müssten hier zuletzt wieder dieselben Verschiebungen herauskommen, die schon in Abb. 131[c] zusammengestellt sind, abgesehen davon, dass dort alle Verschiebungen von demselben Pole aus abgetragen sind, während hier jede Verschiebung an jenem Knotenpunkte angesetzt ist, zu dem sie gehört.

§ 49. Die Stabspannungen im einfach statisch unbestimmten Träger.

Wenn ein Stab oder eine Auflagerbedingung überzählig ist, gibt es zu jedem Belastungsfalle unendlich viele Spannungsbilder, die an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen. Denkt man sich nämlich den überzähligen Stab oder die überzählige Auflagerbedingung entfernt und bringt dafür an den Endpunkten des Stabes oder an dem Auflagerpunkte äussere Kräfte von beliebiger Grösse an, so wie sie von dem Stabe oder durch den Auflagerzwang ausgeübt werden könnten, so sind dadurch die Spannungen in dem übrig bleibenden statisch bestimmten Träger eindeutig bestimmt. Da man aber die Grösse der Stabspannung des überzähligen Stabes oder der überzähligen Auflagercomponente beliebig wählen kann, hat man im ganzen Träger unendlich viele Spannungsbilder, die vom Standpunkte der Mechanik des materiellen Punktes oder des starren Körpers aus alle gleich möglich und auch gleich wahrscheinlich sind.

Von allen diesen verschiedenen Spannungszuständen kann aber nur einer wirklich zu Stande kommen und um ihn unter allen möglichen herauszufinden, bedarf es noch einer über die Lehren der Mechanik starrer Körper hinausreichenden Kenntniss über das Verhalten des Trägers gegenüber aufgebrachten Lasten. Hierzu verhilft uns die Lehre von den elastischen Formänderungen. Wenn wir wissen, dass das Material, aus