Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Ausnahmefall

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

schlossenen Winkelraume (oder im Scheitelwinkelraume), sondern im Nebenwinkelraume liegt, müssen beide Stabspannungen von entgegengesetztem Vorzeichen sein.

Von den beiden Ringstäben 1 und 2 ist also einer gezogen und der andere gedrückt. Derselbe Schluss lässt sich auch für die übrigen unbelasteten Knotenpunkte des inneren Ringes wiederholen und man erkennt daraus, dass die Ringstäbe abwechselnd gezogen und gedrückt sind.

Es fragt sich jetzt, wie sich die Vorzeichen der Spannungen der von dem belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe zu einander verhalten. Dies hängt offenbar davon ab, ob der Ring ein Polygon mit grader oder mit ungrader Seitenzahl bildet. Es ist ein merkwürdiger Umstand, dass sich die Netzwerkkuppeln in diesen beiden Fällen ganz verschieden verhalten. Netzwerkkuppeln mit ungrader Seitenzahl sind weit steifer und tragfähiger, als die mit graden Seitenzahlen.

Bei grader Seitenzahl, wie in dem Beispiele der Abb. 113, haben die von dem belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe 1 und 6 Spannungen von ungleichem Vorzeichen, wie aus dem vorher besprochenen regelmässigen Wechsel folgt. Die Resultirende aus beiden Stabspannungen muss daher ebenfalls in den Nebenwinkelraum des von beiden Stäben eingeschlossenen Winkels fallen. Hierbei kann es auch vorkommen, dass die Resultirende zur Grundrissseite a parallel geht, also mit den beiden Netzwerkstäben in einer Ebene liegt. In diesem Falle, der z. B. immer bei regelmässigen Kuppeln von grader Seitenzahl eintritt, hat die Last P unendlich grosse Stabspannungen zur Folge, d. h. der Ausnahmefall liegt vor. Regelmässige Netzwerkkuppeln mit grader Seitenzahl sind also nicht steif und dürfen daher nicht ausgeführt werden. Uebrigens wird auch schon dann, wenn die Kuppel nicht regelmässig ist, die Resultirende aus den beiden Ringspannungen 1 und 6 leicht wenigstens nahezu in derselben Ebene mit den beiden Netzwerkstäben liegen und auch dann treten schon verhältnissmässig sehr grosse Stabspannungen auf.

Ganz anders ist es bei einer Netzwerkkuppel über einem

Grundrisse von ungrader Seitenzahl. Die beiden vom belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe haben bei ihr Spannungen gleichen Vorzeichens und die Resultirende fällt in den von den Stabrichtungen gebildeten Winkelraum. Sie liegt dann weit ab von der durch die Netzwerkstäbe gelegten Ebene und die Stabspannungen fallen klein aus. So sind besonders Netzwerkkuppeln über regelmässigen Grundrissen von ungrader Seitenzahl durchaus stabil.

Bisher habe ich nur auf die Vorzeichen der in den Ringstäben auftretenden Spannungen geachtet. Man kann aber auch die verhältnissmässigen Grössen dieser Spannungen leicht finden. Dazu zeichnet man den Kräfteplan in Abb. 113, indem man zunächst die Stabspannung 1 in beliebiger Grösse abträgt. Das kommt darauf hinaus, dass man über den Maassstab des Kräfteplans keine Angabe macht, denn unter dem Vorbehalte, dass der Maassstab nachträglich richtig ermittelt werden muss, kann jede beliebige Strecke zur Darstellung der Spannung 1 dienen. Auch das Vorzeichen dieser Spannung muss zunächst unentschieden bleiben.

Nachdem 1 aufgetragen ist, erhält man 2 aus dem Kräftedreiecke 1, 2, b', wo b' eine Parallele zur Grundrissseite b bedeutet. Hieran schliesst sich das Kräftedreieck 2, 3, c', durch das ausgesprochen wird, dass die Resultirende der Ringspannungen 2 und 3 an dem zwischen ihnen liegenden Knotenpunkte parallel zu c gehen muss. Man fährt in dieser Weise fort, bis man zum letzten Ringstabe 6 gelangt ist. Dass die Stabspannungen abwechselnd Zug und Druck bedeuten, wird durch den Kräfteplan ebenfalls schon mit ausgesprochen, wenn man vorläufig auch noch nicht weiss, welche dieser Stäbe gezogen und welche gedrückt sind.

Jedenfalls haben aber wegen der graden Seitenzahl des Grundrisses die erste und die letzte Ringspannung 1 und 6 entgegengesetzte Vorzeichen und wenn man beide an dem belasteten Knotenpunkte zu einer Resultirenden H vereinigen will, muss man die Strecke 1 an den Endpunkt von 6 so antragen, wie es in der Abbildung geschehen ist. Bei ungrader

Seitenzahl des Grundrisses hätte die Strecke 1 an den Endpunkt der letzten Ringspannung in entgegengesetzter Richtung angetragen werden müssen, um die Resultirende H zu erhalten.

Dieser Kunstgriff, den Kräfteplan zunächst einmal im unbestimmt gelassenen Maassstabe aufzutragen, kann auch in anderen Fällen, bei denen die übrigen Knotenpunkte bis auf einen unbelastet sind, manchmal mit Vortheil gebraucht werden und zwar nicht nur beim räumlichen, sondern auch schon beim ebenen Fachwerke. Hier erfahren wir dadurch, wie die Resultirende aus den Stabspannungen 1 und 6 am belasteten Knotenpunkte gerichtet ist. Am belasteten Knotenpunkte haben wir es daher nur noch mit vier Kräften zu thun, die sich Gleichgewicht halten und von denen P vollständig gegeben ist, während man von den drei übrigen die Richtungslinien kennt. Wir brauchen daher nur P nach den drei Richtungslinien mit Hülfe eines windschiefen Kräftevierecks zu zerlegen und finden damit die Spannungen der beiden Netzwerkstäbe, sowie die absolute Grösse und den Pfeil der Resultirenden H. Damit ist auch der Maassstab des vorher gezeichneten ebenen Kräfteplans bekannt und man kann daraus alle Ringspannungen entnehmen. Indem man schliesslich noch die Resultirenden b', c' u. s. f. nach den Richtungslinien der zugehörigen Netzwerkstäbe zerlegt, findet man alle Stabspannungen.

Wenn der Grundriss regelmässig ist, gestaltet sich der Kräfteplan ebenfalls regelmässig. Der Endpunkt von 6 fällt dann mit dem Anfangspunkte von 1 zusammen, d. h. der Kräfteplan bildet ebenfalls ein geschlossenes, regelmässiges Sechseck. Daraus folgt auch, dass die Richtungslinie von H in der That parallel zur Grundrissseite a werden muss. H liegt daher mit den beiden Netzwerkstäben in einer Ebene und die Last P kann durch diese drei Kräfte nicht im Gleichgewichte gehalten werden. Damit ist die vorher schon aufgestellte Behauptung bewiesen, dass eine regelmässige Kuppel bei gerader Seitenzahl einen Ausnahmefall bildet.

Interessant ist hier übrigens, dass eine solche Kuppel nicht nur unendlich kleine, sondern sogar endliche Bewegungen ausführen kann, ohne dass sich die Stablängen zu ändern brauchten, obschon deren Zahl bei Vermeidung des Ausnahmefalles ausreicht, um die Unverschieblichkeit aufrecht zu halten. Der ganze Stabverband bildet hier einen zwangläufigen, „übergeschlossenen“ Mechanismus.

Aus Abb. 114, die eine Netzwerkkuppel über quadratischem Grundrisse darstellt, ist dies leicht ersichtlich. Man betrachte vorerst das durch eine Schraffirung hervorgehobene Dreieck mit der Spitze A. Denkt man sich alle anderen Stäbe weggeschnitten, so kann sich das Dreieck um seine Grundlinie drehen und die Spitze bewegt sich dabei auf einem Kreisbogen. Nun nehme man das Dreieck B und den Ringstab zwischen A und B hinzu. Es ist klar, dass die vorige Bewegung von A immer noch möglich ist; nur muss sich das Dreieck B heben, wenn sich A senkt, damit die Entfernung der Dreiecksspitzen nicht geändert wird. Durch punktirte Linien sind in der Abbildung die neuen Lagen der Stäbe nach einer kleinen Bewegung dieser Art angegeben.

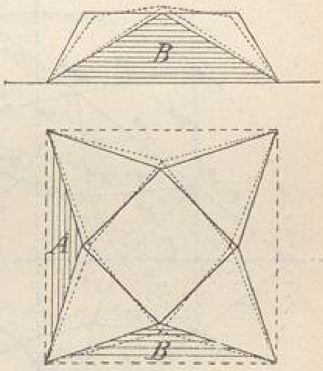

Abb. 114.

Mit dem Anschliessen der übrigen Dreiecke kann man in der gleichen Weise fortfahren. Man behält dabei immer einen zwangläufigen Mechanismus, bei dessen Bewegung sich die Dreiecksspitzen abwechselnd heben und senken. Nun fehlt noch der letzte Ringstab, der das letzte Dreieck in der Kuppel mit dem ersten verbindet. Ist der Kuppelgrundriss von ungerader Seitenzahl, so müssen sich die Spitzen von A und vom letzten Dreiecke in dem zuvor besprochenen Mechanismus gleichzeitig heben oder gleichzeitig senken. Dabei vergrössert oder verkleinert sich ihr Abstand. Sobald man also den letzten Ringstab einfügt, der beide Spitzen in unveränderlichem Abstande hält, wird damit die zuvor noch bestehende Bewegungsfreiheit aufgehoben und man erhält eine steife Kuppelconstruction.