Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Gegendiagonalen

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

für den Knotenpunkt des unteren Ringes und fährt in dieser Weise fort. Die Sparrenstäbe sind sämmtlich gedrückt und ihre Spannungen wachsen von oben nach unten. Auch die Resultirenden R entsprechen bei dem gewählten Beispiele überall Druckspannungen in den Ringstäben, die aber nach unten hin abnehmen. Es kann aber auch vorkommen, dass die Stabspannungen in den unteren Ringen Null werden oder in Zugspannungen übergehen, wenn die Gestalt des Meridians etwas anders gewählt wird, oder wenn die Lasten P nach unten hin nicht so schnell zunehmen, als hier vorausgesetzt wurde. Aus dem Kräfteplane wird der Pfeil der R und hiermit das Vorzeichen der Ringspannungen immer leicht zu erkennen sein.

Die Seitenzahl des Grundrisspolygons, zu dem die Kuppel gehört, ist bis dahin ganz gleichgültig. Um aus den Resultirenden R die Spannungen der Ringstäbe selbst zu finden, muss man aber natürlich die Seitenzahl kennen. Jedes R ist dann in der Ringebene oder, was auf dasselbe hinauskommt, im Grundrisse nach den Richtungen der zugehörigen Ringstäbe zu zerlegen. Man kann die sich hierfür ergebenden Kräftedreiecke auch an die Strecken R in dem bereits gezeichneten Kräfteplane unmittelbar anreihen.

Schwedler hat die Berechnung der Stabspannungen rechnerisch durchgeführt; man erhält seine Formeln, indem man die betreffenden Strecken im Kräfteplane in den gegebenen Lasten P mit Zuhülfenahme der bekannten Richtungswinkel trigonometrisch ausdrückt. Da die Zeichnung weit bequemer ist, als die trigonometrische Rechnung, soll aber von dieser Umsetzung hier abgesehen werden.

Um ein Urtheil darüber zu gewinnen, wie sich das Spannungsbild bei unsymmetrischer Lastvertheilung gestaltet, muss man vor Allem untersuchen, welche Spannungen durch eine Einzellast, die an einem beliebigen Knotenpunkte angreift, hervorgerufen werden. Zu diesem Zwecke muss ich aber zunächst eine Bemerkung über die sogenannten Gegendiagonalen vorausgehen lassen.

Zur Aussteifung genügt es, wie wir sahen, wenn in jedes vierseitige, aus Sparren- und Ringstäben gebildete Fach eine einzige Diagonale eingeschaltet wird, die das Fach in zwei Dreiecke zerlegt. Bei symmetrischer Belastung sind die Diagonalen spannungslos, bei unsymmetrischer haben sie aber Spannungen aufzunehmen. Daraus folgt schon, dass sie bei manchen Belastungen gezogen, bei anderen — namentlich also bei jenen, die die vorigen zu symmetrischen Belastungen ergänzen — gedrückt sein werden. Nun vermeidet man es gerne, solche Stäbe, die ohnehin nur verhältnissmässig geringe Spannungen aufzunehmen haben, auf Druck in Anspruch zu nehmen, weil sie dann auf Zerknicken berechnet werden müssten und daher bei grösserer Länge einen erheblichen Materialaufwand erforderten. Man kann dies dadurch umgehen, dass man jedes Fach mit zwei Diagonalstäben versieht, die nur auf Zug widerstandsfähig zu sein brauchen, so dass die Knickgefahr ausser Betracht bleiben kann.

Freilich erhält man damit streng genommen überzählige Stäbe und ein statisch unbestimmtes Fachwerk. Die statische Unbestimmtheit ist aber hier von besonders einfacher Art und sie hindert nicht, dass die Berechnung im Wesentlichen gerade so erledigt werden kann, wie für den statisch bestimmten Träger. Denkt man sich nämlich zunächst nur in einem einzigen Fache zwei Diagonalen angeordnet, so können dadurch die Spannungen aller ausserhalb dieses Faches liegenden Stäbe überhaupt nicht geändert werden, wie auch der Träger belastet sein möge. Man erkennt dies, wenn man sich den überzähligen Diagonalstab durchschnitten und die in ihm herrschende Spannung durch äussere Kräfte an den beiden Endknotenpunkten ersetzt denkt. Nach Durchschneidung der Diagonale wird der Träger wieder statisch bestimmt und die zu den beiden neu auftretenden Lasten gehörigen Stabspannungen vertheilen sich nur auf die zu demselben Fache gehörenden Stäbe, weil man hierdurch bereits Gleichgewicht an allen Knotenpunkten herstellen kann. Daraus folgt, dass es für alle übrigen Stäbe ganz gleichgültig ist, ob die zweite Diagonale vorhanden ist oder nicht und welche Spannung in ihr auftritt, wenn sie vorhanden ist.

In Abb. 110ᵃ ist ein einzelnes Fach herausgezeichnet. Die gestrichelt angegebene Linie 6 sei als die überzählige Diagonale angesehen. Herrscht in dieser eine beliebige Spannung, so findet man die Spannungen in den Stäben 1 bis 5, die zum statisch bestimmten Träger gehören, wenn 6 durch Lasten an den Endknotenpunkten ersetzt wird, aus dem Kräfteplane in Abb. 110ᵇ. Diese Spannungen stellen in der That Gleichgewicht an allen Knotenpunkten mit den Lasten 6 her, ohne dass die übrigen Stäbe des ganzen Trägers dabei in Mitleidenschaft gezogen würden. Der Kräfteplan ist zur Figur des einzelnen Faches reciprok und zugleich ihr auch ähnlich, wenn sich auch die einzelnen Seiten dabei nicht in der gleichen

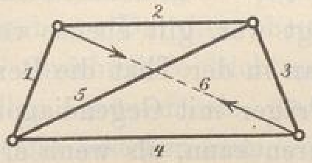

Abb. 110a.

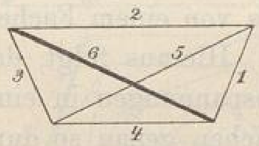

Abb. 110b.

Weise entsprechen, wie sie sonst einander zugewiesen sind. Jedenfalls kann man aber hieraus leicht erkennen, wie gross die Spannungen in den fünf übrigen Stäben des Faches sind, die zu den Spannungen im statisch bestimmten Träger noch hinzutreten, wenn auch 6 in irgend eine Spannung geräth.

Ueber die Grösse der Spannung in 6 kann man zunächst nichts aussagen; sie hängt vor Allem davon ab, wie der Träger hergestellt wurde. Ist nämlich etwa die Diagonale 6, falls sie zuletzt eingesetzt wird, anfänglich ein wenig kürzer als die Entfernung der Knotenpunkte, so müssen diese gewaltsam ein wenig zusammengerückt werden, um die Diagonale zwischen ihnen befestigen zu können. Die Diagonale 6 geräth dann in Zugspannung und auch in den übrigen Stäben des Faches treten M o n t i r u n g s s p a n n u n g e n auf, die dem Spannungsbilde in Abb. 110ᵇ entsprechen. Ueber diese Montirungsspannungen vermag natürlich die Theorie nichts auszusagen, so lange über den Hergang bei der Montirung nichts bekannt ist.

Nimmt man an, dass die Montirungsspannungen durch genaues Einpassen vermieden sind und dass beide Diagonalen nur gegen Zug widerstandsfähig sind, so behalte man für die Berechnung der Stabspannungen im Fachwerkträger zunächst nur eine von beiden Diagonalen bei und führe die Berechnung für den auf diese Weise erhaltenen statisch bestimmten Träger durch. Zeigt sich dann, dass die beibehaltene Diagonale bei der gegebenen Belastung auf Druck beansprucht wurde, so schalte man sie aus und setze die andere an ihre Stelle. Diese muss dann, um die Druckspannung in der vorigen zu tilgen, gezogen sein und zwar ebenso stark, als jene gedrückt war. Dabei ändern sich auch die Spannungen der zu demselben Fache gehörenden Stäbe um die aus Abb. 110^b zu entnehmenden Beträge.

Was von einem Fache gesagt war, gilt ebenso von jedem anderen. Hieraus folgt, dass man in der That die Berechnung der Stabspannungen in einem Träger mit Gegendiagonalen im Wesentlichen genau so durchführen kann, als wenn er statisch bestimmt wäre. Man braucht nur für jedes Fach eine Diagonale beizubehalten, falls man sich vorbehält, für jene Fächer, in denen die Diagonale gedrückt würde, nachträglich die besprochene kleine Umrechnung vorzunehmen. — In der Folge werde ich mich daher auch nur mit der Berechnung des statisch bestimmten Trägers mit einer einzigen Diagonale in jedem Fache beschäftigen.

Zunächst sucht man jene Stäbe auf, die durch die gegebene Einzellast überhaupt nicht in Spannung versetzt werden. Man beginnt mit einem unbelasteten Knotenpunkte des Nabelrings. Von einem solchen gehen vier Stäbe aus, von denen drei in derselben Ebene liegen (nämlich zu demselben trapezförmigen Fache gehören). Der vierte, der nicht in dieser Ebene enthalten ist, muss nothwendig spannungslos sein, weil einer etwa in ihm auftretenden Spannung durch die Resultirende der drei anderen Stabspannungen, die mit diesen ebenfalls in derselben Ebene liegt, nicht Gleichgewicht gehalten werden könnte.