Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Salz von Euler

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

Polyeders. Setzt man eine neue Seitenfläche daran, so kommt eine neue Kante mehr dazu, als neue Ecken, weil diese zwischen jenen liegen. Dies gilt auch beim Ansetzen weiterer Seitenflächen und wir können sagen, dass die Zahl der neu hinzukommenden Kanten ebenso gross ist, als die Zahl der neu hinzukommenden Ecken, vermehrt um die Zahl der hinzukommenden Seitenflächen. Nur zuletzt, wenn der Mantel des Polyeders durch Einfügen der letzten Seitenfläche geschlossen wird, tritt weder eine neue Ecke, noch eine neue Kante, wohl aber eine neue Seitenfläche auf. Die Zahl der Ecken und der Seitenflächen bleibt also sonst immer gleich der Zahl der Kanten, mit Ausnahme des Anfanges und des Endes, wo jedesmal eine Seitenfläche mehr auftritt, als zur Herstellung des Ausgleichs zwischen jenen Zahlen erforderlich wäre. Wird also die Zahl der Kanten mit m, die Zahl der Ecken mit n, die Zahl der Seitenflächen mit f bezeichnet, so hat man

$$m = n + f - 2 \tag{58}$$

und diese Gleichung spricht den Euler'schen Satz aus.

Wir wollen den Satz auf den besonderen Fall anwenden, dass alle Seitenflächen Dreiecke sind. In diesem Falle besteht noch ein leicht nachweisbarer Zusammenhang zwischen m und f. Das Dreifache von f gibt nämlich die Zahl der Kanten an, die man erhält, wenn man in jedem Dreiecke die Kanten von Neuem zählt. Hierbei wird aber jede Kante, die immer eine Grenze zwischen zwei Dreiecken bildet, doppelt gezählt und die Anzahl der Tetraederkanten beträgt daher gerade die Hälfte von $3f$.

Mit $m = \frac{3f}{2}$ oder $f = \frac{2m}{3}$ geht aber Gl. (58) über in

$$\frac{m}{3} = n - 2 \qquad \text{oder} \qquad m = 3n - 6$$

und damit ist, wie ein Vergleich mit Gl. (54) lehrt, nachgewiesen, dass die Zahl der Kanten in einem von lauter Dreiecken umschlossenen Polyeder mit einfach zusammenhängendem Innenraume gerade ausreicht, um bei unveränderlicher Länge die Ecken unverschieblich mit einander zu verbinden. Hiermit ist auch die Möglichkeit der Flechtwerke erkannt und zugleich nachgewiesen, dass sie nicht nur stabile, sondern zugleich auch statisch bestimmte Fachwerke bilden. Man muss sich nur vorbehalten, dass Ausnahmefälle, die hier natürlich ebenso gut, wie beim ebenen Fachwerke vorkommen können, vermieden werden. Dann kann man sagen:

Jede aus Dreiecken zusammengesetzte Mantelfläche, die einen einfach zusammenhängenden Raum vollständig umschliesst, liefert im Allgemeinen, wenn man die Kanten als Stäbe und die Ecken als Knotenpunkte auffasst, ein stabiles und statisch bestimmtes Fachwerk, das man ein Flechtwerk nennt.

Hierbei ist nicht nöthig, dass alle Dreiecke des Mantels in verschiedenen Ebenen liegen; nur dürfen nicht alle Dreiecke, die von einer Ecke ausgehen, in derselben Ebene liegen, weil dies sonst auch von den Stäben an dieser Ecke zuträfe und weil der Knotenpunkt gegen Verschiebungen senkrecht zu jener Ebene alsdann nicht genügend abgestützt wäre. — Ob im Uebrigen ein Ausnahmefall vorliegt oder nicht, entscheidet man am einfachsten dadurch, dass man die Stabspannungen berechnet. Bleiben diese für beliebige endliche Lasten stets endlich, so ist der Ausnahmefall vermieden.

Flechtwerkmäntel vermag man selbst wieder von sehr verschiedenen Gestalten anzugeben und man erkennt daraus leicht den Formenreichthum im Gebiete des räumlichen Fachwerkes. Von den regelmässigen Polyedern sind z. B. das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder ohne Weiteres Flechtwerke; beim Würfel und beim Dodekaeder muss man jede Seitenfläche durch Einschalten von Diagonalen in Dreiecke zerlegen, um Flechtwerke zu erhalten.

Zieht man auf einer Kugel eine Anzahl von Meridianen und Parallelkreisen, wie bei der Gradeintheilung auf einem Erdglobus, betrachtet die Schnittpunkte als Knotenpunkte und die zu den Kreisbögen zwischen zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten gehörigen Sehnen als Stäbe, so braucht man nur noch in jedes vierseitige Fach einen Diagonalstab einzu-