Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Auflagerbedingungen

In Verbindung hiermit soll sofort auch die Frage der Auflagerbedingungen erledigt werden. Nöthigt man einen Knotenpunkt, auf einer bestimmten Fläche zu bleiben, die man sich für eine unendlich kleine Verschiebung auch durch ihre Berührungsebene ersetzt denken kann, so schreibt man ihm eine Auflagerbedingung vor. Von den sechs Freiheitsgraden des starren Körpers wird nämlich dadurch, wenn sonst keine Bewegungsbeschränkung vorliegt, nur einer vernichtet. Wird der Knotenpunkt genöthigt, auf einer Linie zu bleiben, so entspricht dies zwei Auflagerbedingungen und der Körper hat, wenn kein anderes Hinderniss vorliegt, noch vier Freiheitsgrade. Wählt man nämlich den Auflagerknotenpunkt als Anfangspunkt für die Beschreibung der Bewegung, so müssen von den sechs Componenten der Vektoren $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$, durch die der Geschwindigkeitszustand gekennzeichnet wird, zwei Componenten von $\mathfrak{v}_0$ verschwinden, da $\mathfrak{v}_0$ nur in die Richtung der Auflagerbahn fallen kann. — Einem vollständig festgehaltenen Knotenpunkte sind drei Auflagerbedingungen vorgeschrieben.

Die Zahl der Auflagerbedingungen, die man einem starren Körper im Ganzen vorschreiben muss, um ihn festzuhalten, beträgt sechs, nämlich so viel als die Zahl der Freiheitsgrade, die aufzuheben sind. Die sechs Auflagerbedingungen müssen sich auf mindestens drei Knotenpunkte vertheilen. Wollte man zwei Knotenpunkte vollständig festhalten, so würde dies nur fünf von einander unabhängigen Auflagerbedingungen entsprechen. Denkt man sich nämlich einen Knotenpunkt festgehalten und den anderen längs irgend einer Linie beweglich, so kann sich dieser schon nicht mehr bewegen, da er wegen des Zusammenhangs im starren Körper seinen Abstand von dem festgehaltenen Punkte nicht zu ändern vermag.

Man kann also etwa einem Knotenpunkte eine, einem zweiten zwei und einem dritten drei Auflagerbedingungen vorschreiben. Oder man kann auch die sechs Auflagerbedingungen auf sechs Knotenpunkte vertheilen, von denen dann jeder auf einer Fläche gelagert ist, längs deren er sich, wenn sonst kein Hinderniss vorläge, frei zu verschieben vermöchte. Ausserdem vermag man auch, wie schon bei den ebenen Trägern, eine grössere Zahl von Auflagerbedingungen einzuführen, ohne den Träger dadurch statisch unbestimmt zu machen, falls man dafür eine entsprechende Zahl von Stäben aus dem Verbande herausnimmt.

Bezeichnet man die Zahl der Auflagerbedingungen mit p, so erhält man an Stelle von Gl. (54)

$$m = 3n - p, \tag{57}$$

denn um ebensoviel als p grösser wird als 6, ist m zu vermindern, damit der Träger nicht statisch unbestimmt wird.

Die Auflagerbedingungen vermag man übrigens stets auch durch Stäbe zu erfüllen, die hinreichend lang sind und von der festen Erde nach den Auflagerknotenpunkten geführt sind. Ist ein Knotenpunkt durch einen Stab mit der festen Erde verbunden, so wird er dadurch genöthigt, auf einer Kugelfläche zu bleiben, deren Halbmesser gleich der Länge des Stabes ist. Zwei Stäbe führen den Knotenpunkt auf einer Linie; er muss nämlich auf dem Kreise bleiben, in dem sich die den beiden Stäben zugehörigen Kugelflächen schneiden. Drei Stäbe halten den Knotenpunkt vollständig fest. Jeder Stab entspricht daher einer Auflagerbedingung.

Infolgedessen vermag man auch die nähere Untersuchung der Auflagerbedingungen ganz zu umgehen, indem man sie sich alle durch Stäbe ersetzt denkt, abgesehen von den festgehaltenen Knotenpunkten, die man unmittelbar als Punkte der festen Erde betrachtet. Man kann dann jeden räumlichen Fachwerkträger auch als ein Fachwerk auffassen, das die Erde als starren Körper enthält und in dem nur Verbindungsstäbe, sonst aber keine Bewegungsfesseln, die als Auflagerbedingungen zu bezeichnen wären, vorkommen.

Schliesslich sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass man bei der Theorie des ebenen Fachwerkes jedem Knotenpunkte im Grunde genommen eine Auflagerbedingung vorschreibt, von der dort freilich gar nicht ausdrücklich die Rede ist. Man setzt nämlich voraus, dass die Knotenpunkte genöthigt seien, in der Constructionsebene zu bleiben und dies entspricht in der That, sobald wir den Stabverband als ein räumliches System auffassen, einer Auflagerbedingung. Diese n Auflagerbedingungen bewirken einerseits, dass die Figur auch im Raume ihre Gestalt nicht ändern kann und sie führen andererseits zugleich eine Beschränkung in der Bewegungsfreiheit des unveränderlichen Stabgebildes herbei. Es kann sich nachher nur noch in der gemeinsamen Auflagerebene bewegen, hat also nur noch drei Freiheitsgrade. Berücksichtigt man dies, so gehen die Formeln für die nothwendige Stabzahl beim räumlichen Fachwerke ohne Weiteres in die beim ebenen Fachwerke über.

§ 41. Das Flechtwerk.

Die Formen, in denen das räumliche Fachwerk, namentlich bei einer grösseren Zahl von Knotenpunkten, aufzutreten vermag, sind überaus mannichfaltig. Unter ihnen zeichnet sich aber eine bestimmte Art des Aufbaues ihrer einfachen Gesetzmässigkeit wegen besonders aus. Auch für die Anwendungen sind Fachwerke von der Gliederung, die ich hier meine, von besonderer Wichtigkeit und es rechtfertigt sich daher, eine besondere Bezeichnung für sie einzuführen: ich nenne sie Flechtwerke.

Ein Flechtwerk ist ein räumliches Fachwerk, dessen Knotenpunkte und Stäbe sämmtlich auf einem Mantel enthalten sind, der einen inneren Raum umschliesst.

Um zu erkennen, dass räumliche Fachwerke von dieser Art möglich sind, geht man von dem Satze aus, den Euler über die Zahl der Ecken, Kanten und Seitenflächen in einem Polyeder aufgestellt hat. Der Satz gilt übrigens nur für Polyeder mit einfach zusammenhängendem Innenraume und kann für diese durch eine einfache Ueberlegung bewiesen werden.

Beginnt man nämlich beim Aufbaue des Polyeders zunächst mit einer Seitenfläche, so hat man damit schon eine Seitenfläche, eine Anzahl Kanten und ebensoviel Ecken des