Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 43. Die Netzwerkkuppel

§ 43. Die Netzwerkkuppel.

Ein sehr lehrreiches Beispiel für die Berechnung der Stabspannungen in räumlichen Fachwerken liefert die Netzwerkkuppel, die sich von der Schwedler'schen Kuppel in der Anordnung nur wenig unterscheidet. Sie geht aus dieser dadurch hervor, dass man jeden Ring gegen den vorhergehenden etwas dreht, so dass jedem Stabe des einen Rings ein Knotenpunkt des anderen gegenübersteht. Hierdurch fällt zugleich der Unterschied zwischen Sparrenstäben und Diagonalen fort; die an ihre Stelle tretenden sollen als „Netzwerkstäbe" bezeichnet werden.

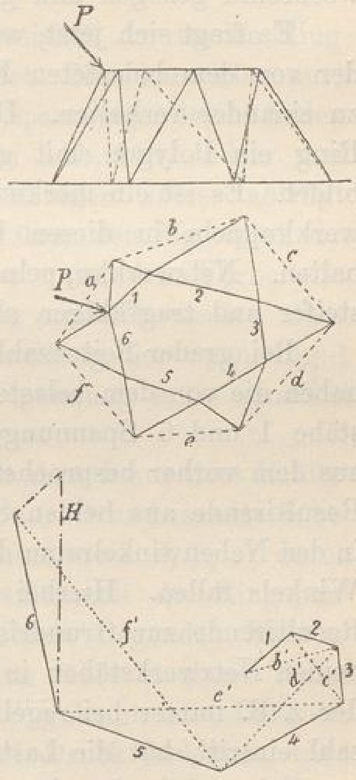

Abb. 113.

In Abb. 113 ist ein einzelnes Stockwerk einer Netzwerkkuppel über einem unregelmässig sechsseitigen Grundrisse dargestellt. Es möge zunächst besprochen werden, wie man die zu einer Last P, die an einem Knotenpunkte des inneren Ringes angreift, gehörigen Stabspannungen findet.

Man betrachte den Knotenpunkt des inneren Ringes, von dem die Stäbe 1 und 2 ausgehen. Im Gegensatze zur Schwedler'schen Kuppel liegen von den vier Stäben dieses Knotenpunktes keine drei in einer Ebene; daher kommen auch keine spannungslosen Stäbe vor. Dagegen weiss man, dass die Resultirende der Stabspannungen 1 und 2 mit der Resultirenden aus den Spannungen der beiden Netzwerkstäbe im Gleichgewichte stehen und daher in die Schnittlinie der durch beide Stabpaare gelegten Ebenen fallen muss. Diese Schnittlinie geht parallel zur Grundrissseite b. Wenn aber die Resultirende aus zwei Stabspannungen nicht in dem von den Stäben eingeschlossenen Winkelraume (oder im Scheitelwinkelraume), sondern im Nebenwinkelraume liegt, müssen beide Stabspannungen von entgegengesetztem Vorzeichen sein.

Von den beiden Ringstäben 1 und 2 ist also einer gezogen und der andere gedrückt. Derselbe Schluss lässt sich auch für die übrigen unbelasteten Knotenpunkte des inneren Ringes wiederholen und man erkennt daraus, dass die Ringstäbe abwechselnd gezogen und gedrückt sind.

Es fragt sich jetzt, wie sich die Vorzeichen der Spannungen der von dem belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe zu einander verhalten. Dies hängt offenbar davon ab, ob der Ring ein Polygon mit grader oder mit ungrader Seitenzahl bildet. Es ist ein merkwürdiger Umstand, dass sich die Netzwerkkuppeln in diesen beiden Fällen ganz verschieden verhalten. Netzwerkkuppeln mit ungrader Seitenzahl sind weit steifer und tragfähiger, als die mit graden Seitenzahlen.

Bei grader Seitenzahl, wie in dem Beispiele der Abb. 113, haben die von dem belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe 1 und 6 Spannungen von ungleichem Vorzeichen, wie aus dem vorher besprochenen regelmässigen Wechsel folgt. Die Resultirende aus beiden Stabspannungen muss daher ebenfalls in den Nebenwinkelraum des von beiden Stäben eingeschlossenen Winkels fallen. Hierbei kann es auch vorkommen, dass die Resultirende zur Grundrissseite a parallel geht, also mit den beiden Netzwerkstäben in einer Ebene liegt. In diesem Falle, der z. B. immer bei regelmässigen Kuppeln von grader Seitenzahl eintritt, hat die Last P unendlich grosse Stabspannungen zur Folge, d. h. der Ausnahmefall liegt vor. Regelmässige Netzwerkkuppeln mit grader Seitenzahl sind also nicht steif und dürfen daher nicht ausgeführt werden. Uebrigens wird auch schon dann, wenn die Kuppel nicht regelmässig ist, die Resultirende aus den beiden Ringspannungen 1 und 6 leicht wenigstens nahezu in derselben Ebene mit den beiden Netzwerkstäben liegen und auch dann treten schon verhältnissmässig sehr grosse Stabspannungen auf.

Ganz anders ist es bei einer Netzwerkkuppel über einem

Grundrisse von ungrader Seitenzahl. Die beiden vom belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe haben bei ihr Spannungen gleichen Vorzeichens und die Resultirende fällt in den von den Stabrichtungen gebildeten Winkelraum. Sie liegt dann weit ab von der durch die Netzwerkstäbe gelegten Ebene und die Stabspannungen fallen klein aus. So sind besonders Netzwerkkuppeln über regelmässigen Grundrissen von ungrader Seitenzahl durchaus stabil.

Bisher habe ich nur auf die Vorzeichen der in den Ringstäben auftretenden Spannungen geachtet. Man kann aber auch die verhältnissmässigen Grössen dieser Spannungen leicht finden. Dazu zeichnet man den Kräfteplan in Abb. 113, indem man zunächst die Stabspannung 1 in beliebiger Grösse abträgt. Das kommt darauf hinaus, dass man über den Maassstab des Kräfteplans keine Angabe macht, denn unter dem Vorbehalte, dass der Maassstab nachträglich richtig ermittelt werden muss, kann jede beliebige Strecke zur Darstellung der Spannung 1 dienen. Auch das Vorzeichen dieser Spannung muss zunächst unentschieden bleiben.

Nachdem 1 aufgetragen ist, erhält man 2 aus dem Kräftedreiecke 1, 2, b', wo b' eine Parallele zur Grundrissseite b bedeutet. Hieran schliesst sich das Kräftedreieck 2, 3, c', durch das ausgesprochen wird, dass die Resultirende der Ringspannungen 2 und 3 an dem zwischen ihnen liegenden Knotenpunkte parallel zu c gehen muss. Man fährt in dieser Weise fort, bis man zum letzten Ringstabe 6 gelangt ist. Dass die Stabspannungen abwechselnd Zug und Druck bedeuten, wird durch den Kräfteplan ebenfalls schon mit ausgesprochen, wenn man vorläufig auch noch nicht weiss, welche dieser Stäbe gezogen und welche gedrückt sind.

Jedenfalls haben aber wegen der graden Seitenzahl des Grundrisses die erste und die letzte Ringspannung 1 und 6 entgegengesetzte Vorzeichen und wenn man beide an dem belasteten Knotenpunkte zu einer Resultirenden H vereinigen will, muss man die Strecke 1 an den Endpunkt von 6 so antragen, wie es in der Abbildung geschehen ist. Bei ungrader

Seitenzahl des Grundrisses hätte die Strecke 1 an den Endpunkt der letzten Ringspannung in entgegengesetzter Richtung angetragen werden müssen, um die Resultirende H zu erhalten.

Dieser Kunstgriff, den Kräfteplan zunächst einmal im unbestimmt gelassenen Maassstabe aufzutragen, kann auch in anderen Fällen, bei denen die übrigen Knotenpunkte bis auf einen unbelastet sind, manchmal mit Vortheil gebraucht werden und zwar nicht nur beim räumlichen, sondern auch schon beim ebenen Fachwerke. Hier erfahren wir dadurch, wie die Resultirende aus den Stabspannungen 1 und 6 am belasteten Knotenpunkte gerichtet ist. Am belasteten Knotenpunkte haben wir es daher nur noch mit vier Kräften zu thun, die sich Gleichgewicht halten und von denen P vollständig gegeben ist, während man von den drei übrigen die Richtungslinien kennt. Wir brauchen daher nur P nach den drei Richtungslinien mit Hülfe eines windschiefen Kräftevierecks zu zerlegen und finden damit die Spannungen der beiden Netzwerkstäbe, sowie die absolute Grösse und den Pfeil der Resultirenden H. Damit ist auch der Maassstab des vorher gezeichneten ebenen Kräfteplans bekannt und man kann daraus alle Ringspannungen entnehmen. Indem man schliesslich noch die Resultirenden b', c' u. s. f. nach den Richtungslinien der zugehörigen Netzwerkstäbe zerlegt, findet man alle Stabspannungen.

Wenn der Grundriss regelmässig ist, gestaltet sich der Kräfteplan ebenfalls regelmässig. Der Endpunkt von 6 fällt dann mit dem Anfangspunkte von 1 zusammen, d. h. der Kräfteplan bildet ebenfalls ein geschlossenes, regelmässiges Sechseck. Daraus folgt auch, dass die Richtungslinie von H in der That parallel zur Grundrissseite a werden muss. H liegt daher mit den beiden Netzwerkstäben in einer Ebene und die Last P kann durch diese drei Kräfte nicht im Gleichgewichte gehalten werden. Damit ist die vorher schon aufgestellte Behauptung bewiesen, dass eine regelmässige Kuppel bei gerader Seitenzahl einen Ausnahmefall bildet.

Interessant ist hier übrigens, dass eine solche Kuppel nicht nur unendlich kleine, sondern sogar endliche Bewegungen ausführen kann, ohne dass sich die Stablängen zu ändern brauchten, obschon deren Zahl bei Vermeidung des Ausnahmefalles ausreicht, um die Unverschieblichkeit aufrecht zu halten. Der ganze Stabverband bildet hier einen zwangläufigen, „übergeschlossenen“ Mechanismus.

Aus Abb. 114, die eine Netzwerkkuppel über quadratischem Grundrisse darstellt, ist dies leicht ersichtlich. Man betrachte vorerst das durch eine Schraffirung hervorgehobene Dreieck mit der Spitze A. Denkt man sich alle anderen Stäbe weggeschnitten, so kann sich das Dreieck um seine Grundlinie drehen und die Spitze bewegt sich dabei auf einem Kreisbogen. Nun nehme man das Dreieck B und den Ringstab zwischen A und B hinzu. Es ist klar, dass die vorige Bewegung von A immer noch möglich ist; nur muss sich das Dreieck B heben, wenn sich A senkt, damit die Entfernung der Dreiecksspitzen nicht geändert wird. Durch punktirte Linien sind in der Abbildung die neuen Lagen der Stäbe nach einer kleinen Bewegung dieser Art angegeben.

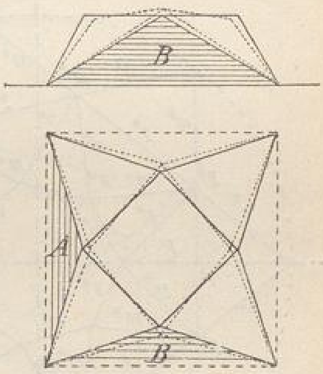

Abb. 114.

Mit dem Anschliessen der übrigen Dreiecke kann man in der gleichen Weise fortfahren. Man behält dabei immer einen zwangläufigen Mechanismus, bei dessen Bewegung sich die Dreiecksspitzen abwechselnd heben und senken. Nun fehlt noch der letzte Ringstab, der das letzte Dreieck in der Kuppel mit dem ersten verbindet. Ist der Kuppelgrundriss von ungerader Seitenzahl, so müssen sich die Spitzen von A und vom letzten Dreiecke in dem zuvor besprochenen Mechanismus gleichzeitig heben oder gleichzeitig senken. Dabei vergrössert oder verkleinert sich ihr Abstand. Sobald man also den letzten Ringstab einfügt, der beide Spitzen in unveränderlichem Abstande hält, wird damit die zuvor noch bestehende Bewegungsfreiheit aufgehoben und man erhält eine steife Kuppelconstruction.

Bei gerader Seitenzahl des Grundrisses senkt sich dagegen die letzte Dreieckspitze, wenn sich die erste hebt und umgekehrt. Dabei kann es vorkommen, dass sich der Abstand beider Spitzen ohnehin nicht ändert, wenn auch der letzte Ringstab gar nicht eingeschaltet ist. Wenn die Kuppel regelmässig ist, wie in Abb. 114, folgt schon aus Symmetriegründen, dass sich der Abstand beider Spitzen nicht ändern kann. Die Einschaltung des letzten Ringstabes ändert daher überhaupt nichts an der vorher bestehenden Bewegungsmöglichkeit und die Kuppel bleibt ein Mechanismus von endlicher Beweglichkeit. Eine Anordnung wie in Abb. 114 ist daher unbedingt zu vermeiden.

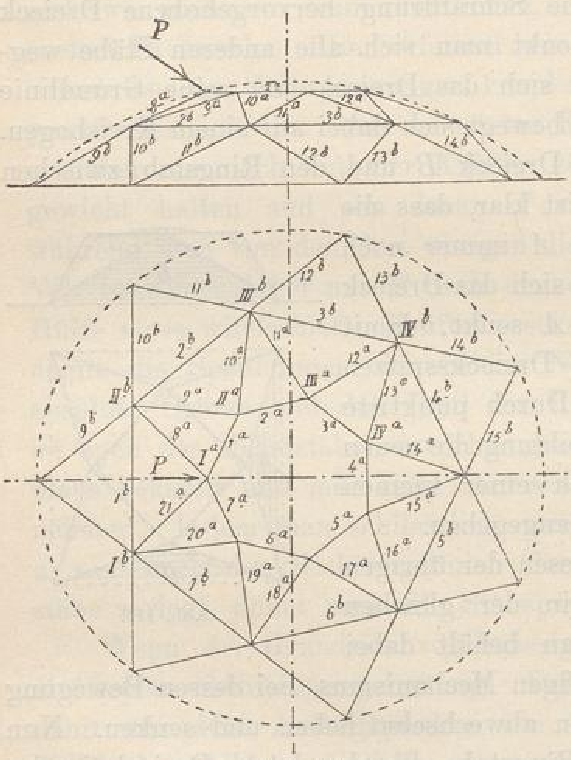

Abb. 115.

Regelmässige Netzwerkkuppeln mit ungerader Seitenzahl sind dagegen vollkommen stabil. Das Verfahren für die Berechnung der Stabspannungen sei an dem Beispiele der Abb. 115, die eine siebenseitige Kuppel darstellt, erläutert.

Zunächst weiss man, dass die Stäbe des Nabelrings abwechselnd gezogen und gedrückt sind und zwar sind diese Spannungen des regelmässigen Grundrisses wegen alle von gleicher Grösse. Die Resultirende der Stabspannungen 1^a und 7^a an dem belasteten Knotenpunkte I^a fällt also in die durch diesen Punkt gelegte Symmetrieebene der Kuppel. Die Kräfte-zerlegung an diesem Punkte kann daher ohne Weiteres vorgenommen werden. Abb. 116 zeigt den Kräfteplan in Aufriss und Grundriss. Man beginnt im Aufrisse mit dem Dreiecke aus P, der horizontalen Resultirenden von 1^a und 7^a und einer zu 8^a und 21^a, die sich im Aufrisse decken, parallelen Seite. Das Dreieck ist zugleich als Aufriss eines räumlichen Kräftefünfecks aufzufassen, dessen Grundriss gefunden wird, indem man die aus dem Aufrisse herabgetragene Resultirende von 1^a und 7^a nach den Richtungen dieser beiden Stäbe zerlegt und aus den Endpunkten von P und 7^a Parallelen zu 8^a und 21^a im Grundrisse zieht. Projicirt man die Ecken, in denen 1^a und 7^a sowie 8^a und 21^a aneinander stossen, nach oben, so geht auch das Dreieck im Aufrisse in ein Fünfeck über, von dem nur zweimal zwei Seiten in eine Grade fallen.

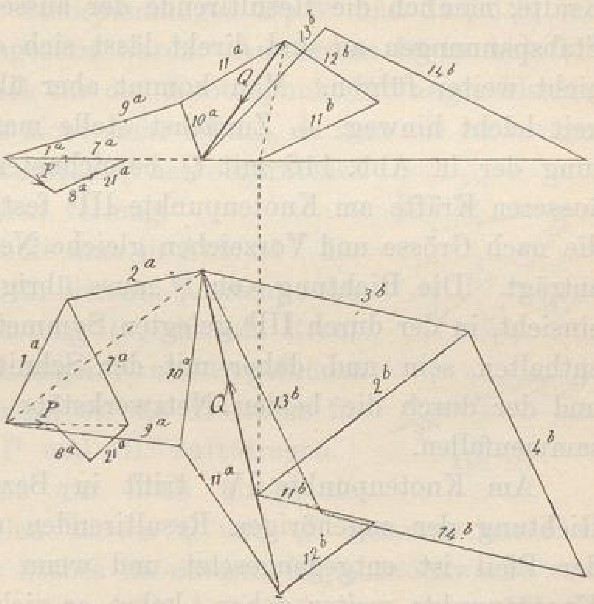

Abb. 116.

Hierauf geht man zum Knotenpunkte II^a über, indem man im Grundrisse 2^a an 1^a in gleicher Grösse anreiht und dann die Parallelen zu 9^a und 10^a zieht. Die gestrichelt gezogene Resultirende aus 1^a und 2^a geht parallel zum Stabe 2^b des unteren Ringes. Auch in den Aufriss kann das Kräfteviereck $1^a\,2^a\,9^a\,10^a$ sofort übertragen werden und für die Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung dient dabei die Bemerkung, dass die Eckpunkte, in denen 9^a und 10^a aneinanderstossen, in Aufriss und Grundriss senkrecht über einander liegen müssen.

Es ist nicht nöthig, noch weitere Knotenpunkte des Nabelrings ins Auge zu fassen, da an allen anderen dieselben Stabspannungen wie an II^a auftreten, nur mit dem Unterschiede, dass vom einen zum anderen jedesmal die Vorzeichen der Stabspannungen wechseln.

Wenn wir jetzt zum unteren Stockwerke übergehen, können wir uns das obere Stockwerk ganz beseitigt und die Spannungen der Netzwerkstäbe des oberen Geschosses an dem dazwischen liegenden Ringe als äussere Kräfte angebracht denken. Freilich greifen dann an allen Knotenpunkten dieses Ringes fünf Kräfte, nämlich die Resultirende der äusseren Kräfte und vier Stabspannungen an und direkt lässt sich daher die Zerlegung nicht weiter führen. Man kommt aber über diese Schwierigkeit leicht hinweg. — Zunächst stelle man Grösse und Richtung der in Abb. 116 mit Q bezeichneten Resultirenden der äusseren Kräfte am Knotenpunkte III^b fest, indem man an 10^a die nach Grösse und Vorzeichen gleiche Netzwerkspannung 11^a anträgt. Die Richtung von Q muss übrigens, wie man leicht einsieht, in der durch III^b gelegten Symmetrieebene der Kuppel enthalten sein und daher mit der Schnittlinie dieser Ebene und der durch die beiden Netzwerkstäbe gelegten Ebene zusammenfallen.

Am Knotenpunkte IV^b trifft in Bezug auf Grösse und Richtung der zugehörigen Resultirenden Q dasselbe zu; nur der Pfeil ist entgegengesetzt und wenn wir zum folgenden Knotenpunkte weiter gehen, kehrt er sich immer wieder um. Nur die Knotenpunkte I^b und II^b machen eine Ausnahme. An ihnen stösst jedesmal ein gezogener und ein gedrückter Netzwerkstab zusammen und die Resultirende Q' an II^b aus 8^a und 9^a konnte in dem besonderen Kräfteplane Abb. 117 aus den bekannten Strecken sofort gefunden werden.

Man untersucht nun, welche Spannungen in den Stäben des unteren Stockwerks durch eine einzige Last Q, die am Knotenpunkte III^b angreift, hervorgerufen werden. Dies geschieht genau so wie vorher die Ermittelung der Stabspannungen im oberen Geschosse unter der Last P. Man zieht in Abb. 115 einen Durchmesser durch III^b, projicirt den Schnitt mit dem

Auflagerkreise in den Aufriss und verbindet diesen Punkt mit III^b im Aufrisse. In diese Linie fällt die Resultirende aus den Stabspannungen 11^b und 12^b unter der Last Q; die Resultirende aus den Ringspannungen 2^b und 3^b ist horizontal und fällt ebenfalls in die Durchmesserebene. Hiernach konnte das Dreieck aus Q, der horizontalen Richtung und der vorher construirten Richtung der Resultirenden von 11^b und 12^b im Aufrisse gezeichnet werden. Im Grundrisse projicirt sich das Dreieck als Gerade. Dann zerlegt man die Resultirenden nach den Richtungen der Stabspannungen 2^b, 3^b und 11^b, 12^b, aus denen sie zusammengesetzt waren. Ausserdem ist in Abb. 116 noch ein Kräfteviereck für den Knotenpunkt IV^b angeschlossen. Weiter zu gehen, ist nicht mehr nöthig, da man wie im vorigen Falle nun schon alle durch Q hervorgerufenen Spannungen anzugeben vermag.

Hierauf wiederhole man in Abb. 117 dieselbe Untersuchung für die am Knotenpunkte II^b angreifende Belastung Q', die als Resultirende der Stabspannungen 8^a und 9^a gefunden war. Auch hier genügt es, die Kraftecke für die Knotenpunkte II^b und III^b aufzutragen.

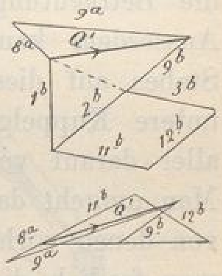
Abb. 117.

Nun bleibt uns nur noch übrig, die Spannungen aus allen Lasten Q und Q' zusammenzuzählen. Die Spannung jedes Stabes im unteren Kuppelstockwerke wird als eine Summe von sieben Gliedern gefunden, deren Werthe sich aus den gezeichneten Kräfteplänen sämmtlich entnehmen lassen. Man betrachte z. B. den Stab 3^b. Die Last Q am Knotenpunkte III^b versetzt ihn, wie aus dem Kräfteplane Abb. 116 hervorgeht, in eine Zugspannung, deren Betrag mit s bezeichnet sein möge. Am Knotenpunkt IV^b greift eine Last $-Q$ an, deren Pfeil nach oben hin gekehrt ist und die, da sich sonst Alles gleich bleibt, die Spannung $-s$ in Stab III^b hervorbringt. Am folgenden Knotenpunkte V^b geht der Pfeil von Q wieder nach abwärts und der Ringstab 4^b erfährt daher eine Zugspannung vom Betrage s. Der Stab 3^b, den wir jetzt ins Auge gefasst haben, wird daher gedrückt und der vom Knotenpunkte

V^b herrührende Beitrag zur Spannung in 3^b ist gleich $-s$. Dieselben Ueberlegungen lehren, dass auch von VI^b und VII^b her die Spannungen $-s$ in 3^b erzeugt werden.

Die Last Q' am Knotenpunkte II^b bringt in 3^b, wie aus dem Kräfteplane folgt, eine Zugspannung hervor. Die entsprechende und symmetrisch zur vorigen liegende Last Q' am Knotenpunkte I^b versetzt den Stab 1^b in Druckspannung, daher 2^b in Zug- und 3^b wieder in Druckspannung und zwar vom gleichen Betrage wie vorher die Zugspannung.

Zählen wir alle sieben Posten zusammen, so finden wir die Spannung des Stabes 3^b gleich $-3s$, d. h. der Stab 3^b wird im Ganzen mit einer dreifach so grossen Kraft gedrückt, als sie aus Abb. 116 zu entnehmen ist. — Aehnlich lässt sich die Betrachtung auch für alle übrigen Stäbe durchführen. Ausserdem kann man auch, nachdem die Spannung eines Stabes auf diese Art ermittelt ist, den Kräfteplan für das untere Kuppelgeschoss unter gleichzeitiger Berücksichtigung aller darauf von oben her übertragenen Lasten construiren. Man umgeht dadurch die Zusammenziehung der sieben Posten, von denen vorher die Rede war, für alle übrigen Stäbe, wofür man freilich die Construction eines neuen Kräfteplans mit in den Kauf nehmen muss.

§ 44. Das Tonnenflechtwerk-Dach.

Abb. 118 zeigt einen Theil eines Tonnenflechtwerk-Daches in axonometrischer Zeichnung. Nach vorn hin muss man sich den Stabverband in derselben Weise bis zu einer zweiten Stirnmauer hin, an der er ebenso wie an der hinteren aufgelagert wird, fortgesetzt denken.

Die Construction entsteht aus dem geschlossenen Tonnenflechtwerke auf die schon in § 41 näher beschriebene Weise. Die statische Bestimmtheit kann durch nachträgliche Fortlassung der Diagonalstäbe in den beiden untersten Seitenflächen der Tonnen und durch längsverschiebliche Auflagerung der Knotenpunkte auf einer der beiden Stirnmauern herbeigeführt werden. Diagonalen, die etwa in den Fächern der unteren