Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 41. Das Flechtwerk

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

seien, in der Constructionsebene zu bleiben und dies entspricht in der That, sobald wir den Stabverband als ein räumliches System auffassen, einer Auflagerbedingung. Diese n Auflagerbedingungen bewirken einerseits, dass die Figur auch im Raume ihre Gestalt nicht ändern kann und sie führen andererseits zugleich eine Beschränkung in der Bewegungsfreiheit des unveränderlichen Stabgebildes herbei. Es kann sich nachher nur noch in der gemeinsamen Auflagerebene bewegen, hat also nur noch drei Freiheitsgrade. Berücksichtigt man dies, so gehen die Formeln für die nothwendige Stabzahl beim räumlichen Fachwerke ohne Weiteres in die beim ebenen Fachwerke über.

§ 41. **Das Flechtwerk.**

Die Formen, in denen das räumliche Fachwerk, namentlich bei einer grösseren Zahl von Knotenpunkten, aufzutreten vermag, sind überaus mannichfaltig. Unter ihnen zeichnet sich aber eine bestimmte Art des Aufbaues ihrer einfachen Gesetzmässigkeit wegen besonders aus. Auch für die Anwendungen sind Fachwerke von der Gliederung, die ich hier meine, von besonderer Wichtigkeit und es rechtfertigt sich daher, eine besondere Bezeichnung für sie einzuführen: ich nenne sie Flechtwerke.

Ein Flechtwerk ist ein räumliches Fachwerk, dessen Knotenpunkte und Stäbe sämmtlich auf einem Mantel enthalten sind, der einen inneren Raum umschliesst.

Um zu erkennen, dass räumliche Fachwerke von dieser Art möglich sind, geht man von dem Satze aus, den Euler über die Zahl der Ecken, Kanten und Seitenflächen in einem Polyeder aufgestellt hat. Der Satz gilt übrigens nur für Polyeder mit einfach zusammenhängendem Innenraume und kann für diese durch eine einfache Ueberlegung bewiesen werden.

Beginnt man nämlich beim Aufbaue des Polyeders zunächst mit einer Seitenfläche, so hat man damit schon eine Seitenfläche, eine Anzahl Kanten und ebensoviel Ecken des

Polyeders. Setzt man eine neue Seitenfläche daran, so kommt eine neue Kante mehr dazu, als neue Ecken, weil diese zwischen jenen liegen. Dies gilt auch beim Ansetzen weiterer Seitenflächen und wir können sagen, dass die Zahl der neu hinzukommenden Kanten ebenso gross ist, als die Zahl der neu hinzukommenden Ecken, vermehrt um die Zahl der hinzukommenden Seitenflächen. Nur zuletzt, wenn der Mantel des Polyeders durch Einfügen der letzten Seitenfläche geschlossen wird, tritt weder eine neue Ecke, noch eine neue Kante, wohl aber eine neue Seitenfläche auf. Die Zahl der Ecken und der Seitenflächen bleibt also sonst immer gleich der Zahl der Kanten, mit Ausnahme des Anfanges und des Endes, wo jedesmal eine Seitenfläche mehr auftritt, als zur Herstellung des Ausgleichs zwischen jenen Zahlen erforderlich wäre. Wird also die Zahl der Kanten mit m, die Zahl der Ecken mit n, die Zahl der Seitenflächen mit f bezeichnet, so hat man

$$m = n + f - 2 \tag{58}$$

und diese Gleichung spricht den Euler'schen Satz aus.

Wir wollen den Satz auf den besonderen Fall anwenden, dass alle Seitenflächen Dreiecke sind. In diesem Falle besteht noch ein leicht nachweisbarer Zusammenhang zwischen m und f. Das Dreifache von f gibt nämlich die Zahl der Kanten an, die man erhält, wenn man in jedem Dreiecke die Kanten von Neuem zählt. Hierbei wird aber jede Kante, die immer eine Grenze zwischen zwei Dreiecken bildet, doppelt gezählt und die Anzahl der Tetraederkanten beträgt daher gerade die Hälfte von $3f$.

Mit $m = \frac{3f}{2}$ oder $f = \frac{2m}{3}$ geht aber Gl. (58) über in

$$\frac{m}{3} = n - 2 \quad \text{oder} \quad m = 3n - 6$$

und damit ist, wie ein Vergleich mit Gl. (54) lehrt, nachgewiesen, dass die Zahl der Kanten in einem von lauter Dreiecken umschlossenen Polyeder mit einfach zusammenhängendem Innenraume gerade ausreicht, um bei unveränderlicher Länge die Ecken unverschieblich mit einander zu verbinden. Hiermit ist auch die Möglichkeit der Flechtwerke erkannt und zugleich nachgewiesen, dass sie nicht nur stabile, sondern zugleich auch statisch bestimmte Fachwerke bilden. Man muss sich nur vorbehalten, dass Ausnahmefälle, die hier natürlich ebenso gut, wie beim ebenen Fachwerke vorkommen können, vermieden werden. Dann kann man sagen:

Jede aus Dreiecken zusammengesetzte Mantelfläche, die einen einfach zusammenhängenden Raum vollständig umschliesst, liefert im Allgemeinen, wenn man die Kanten als Stäbe und die Ecken als Knotenpunkte auffasst, ein stabiles und statisch bestimmtes Fachwerk, das man ein Flechtwerk nennt.

Hierbei ist nicht nöthig, dass alle Dreiecke des Mantels in verschiedenen Ebenen liegen; nur dürfen nicht alle Dreiecke, die von einer Ecke ausgehen, in derselben Ebene liegen, weil dies sonst auch von den Stäben an dieser Ecke zuträfe und weil der Knotenpunkt gegen Verschiebungen senkrecht zu jener Ebene alsdann nicht genügend abgestützt wäre. — Ob im Uebrigen ein Ausnahmefall vorliegt oder nicht, entscheidet man am einfachsten dadurch, dass man die Stabspannungen berechnet. Bleiben diese für beliebige endliche Lasten stets endlich, so ist der Ausnahmefall vermieden.

Flechtwerkmäntel vermag man selbst wieder von sehr verschiedenen Gestalten anzugeben und man erkennt daraus leicht den Formenreichthum im Gebiete des räumlichen Fachwerkes. Von den regelmässigen Polyedern sind z. B. das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder ohne Weiteres Flechtwerke; beim Würfel und beim Dodekaeder muss man jede Seitenfläche durch Einschalten von Diagonalen in Dreiecke zerlegen, um Flechtwerke zu erhalten.

Zieht man auf einer Kugel eine Anzahl von Meridianen und Parallelkreisen, wie bei der Gradeintheilung auf einem Erdglobus, betrachtet die Schnittpunkte als Knotenpunkte und die zu den Kreisbögen zwischen zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten gehörigen Sehnen als Stäbe, so braucht man nur noch in jedes vierseitige Fach einen Diagonalstab einzuschieben, um zu einem Flechtwerke zu gelangen. Bei einem Ellipsoide oder einer geschlossenen Fläche von ähnlicher Art führt dasselbe Verfahren, das leicht auch noch ein wenig abgeändert werden kann, falls man dabei nur zu einem aus Dreiecken zusammengesetzten Mantel gelangt, ebenfalls zum Ziele.

Uebrigens macht es auch nicht viel aus, wenn man bei dem in der beschriebenen Weise erhaltenen Kugelflechtwerke die Stäbe nicht geradlinig ausführt, sondern sie nach den Meridian- und Parallelkreisen, denen sie folgen, krümmt. Denn auch ein Stab, der zwischen seinen beiden Knotenpunkten ein wenig gekrümmt ist, vermag Entfernungsänderungen seiner Endpunkte zu verhüten, ohne dabei wesentlich auf Biegung beansprucht zu werden, solange nur die kreisförmige Stabaxe sich von der zugehörigen Sehne nicht viel entfernt. Die Zahl der Knotenpunkte oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Zahl der Meridiane und Parallelkreise, darf also in diesem Falle nicht zu klein gewählt sein. Andererseits soll freilich die Zahl der Knotenpunkte auch nicht zu gross sein, weil sich sonst die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe zu wenig von der Tangential-Ebene an die Kugel abheben. Liegen die Stäbe nämlich nahezu in einer Ebene, so nähern wir uns dem Ausnahmefalle und wir erhalten für Einzellasten an einem solchen Knotenpunkte, die eine Componente rechtwinklig zur Tangential-Ebene haben, grosse Stabspannungen.

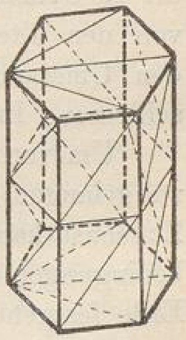
Abb. 107.

Ein anderer Fall wird durch das in Abb. 107 an einem einfachen Beispiele vorgeführte Cylinder- oder Tonnenflechtwerk gebildet. Wie vorher die Kugel, kann man sich auch einen Cylindermantel durch eine Anzahl von Parallelkreisen und (an Stelle der Meridiane) durch Cylinder-Erzeugende in vierseitige Fächer zerlegt denken, die durch Einschalten von Diagonalen in Dreiecke getheilt werden können. Um einen geschlossenen Flechtwerkmantel zu erhalten, muss man aber dann auch noch die beiden Basispolygone durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen.

Da die Bögen, wenn man ursprünglich von einem Cylinder ausging, nachträglich durch die zugehörigen Sehnen ersetzt werden müssen, wenn man nur geradlinige Stäbe anwenden will, erscheint der Flechtwerkmantel schliesslich in der Gestalt eines Prismas. Bemerkenswerth ist dabei, dass man sich das Flechtwerk auch durch Aneinanderfügen von lauter ebenen Fachwerken entstanden denken kann. Die auf jeder Seitenfläche des Prismas liegenden Stäbe bilden für sich genommen ein ebenes Fachwerk mit parallelen Gurten. Dabei haben je zwei aufeinanderfolgende ebene Fachwerke die dazwischen liegende Gurtung gemeinsam. Von diesem Umstande kann man Gebrauch machen, um die Berechnung der Stabspannungen im Tonnenflechtwerke bei gegebenen Lasten auf die Berechnung der Stabspannungen in den ebenen Fachwerken zurückzuführen.

Schliesslich kann, um noch einen anderen einfachen und wichtigen Fall hervorzuheben, das Prisma in Abb. 107 auch durch eine abgestumpfte Pyramide ersetzt werden, ohne dass sich sonst etwas änderte. Ausserdem steht auch nichts im Wege, diese Pyramide bis zur Spitze hin durchzuführen. Das eine Basispolygon fällt dann fort und wird durch die Spitze ersetzt. Man gelangt so zu den bei neueren Kirchthurmbauten oft zu Grunde gelegten Pyramiden-Flechtwerken, die sich von den älteren Constructionen, wie alle Flechtwerke, durch den Umstand unterscheiden, dass der von dem Mantel umschlossene Innenraum von keinen Stäben durchsetzt wird.

Um von einem Flechtwerke zu einem Flechtwerkträger zu gelangen, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen. Zunächst kann man sechs von einander unabhängige Auflagerbedingungen vorschreiben, durch die das Flechtwerk gegen die Erde festgehalten wird, wodurch es in einen Träger übergeht, der beliebige Lasten, die nun nicht mehr in derselben Ebene zu liegen brauchen, aufnehmen kann. Am einfachsten werden diese Auflagerbedingungen gewöhnlich durch Stäbe, die von der Erde nach dem Flechtwerke geführt sind, ersetzt. Von früher her ist schon bekannt, welche Ausnahmefälle bei der Anordnung der sechs Verbindungsstäbe vermieden werden müssen, um eine steife Verbindung herzustellen. Ein Beispiel für einen in dieser Weise gewonnenen Flechtwerkträger wird uns unter den Aufgaben begegnen. Zieht man mehr als sechs Verbindungsstäbe, so wird der Träger statisch unbestimmt; man kann aber dann, ebenso wie es schon in der Lehre vom ebenen Fachwerke besprochen wurde, durch Fortlassen einer entsprechenden Anzahl von Stäben des Flechtwerkes die statische Bestimmtheit auch wieder herstellen.

Ein anderer Weg zur Gewinnung von Flechtwerkträgern wird durch die folgende Ueberlegung gewiesen. Man denke sich ein Flechtwerk durch einen beliebigen Schnitt in zwei Theile getrennt. Jeder Theil für sich ist dann nicht mehr steif, wenigstens dann nicht, wenn der Schnitt, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, mehr als sechs Stäbe trifft. Nimmt man aber den einen Theil und verbindet ihn durch die vom Schnitte getroffenen Stäbe mit der festen Erde, so erhält man auf jeden Fall einen unverschieblichen Stabverband. Denn schon der Zusammenhang mit dem für sich nicht steifen Reste, der bei der Führung des Schnittes wegfiel, reichte aus, um Gestaltänderungen auszuschliessen. Um so mehr muss also der Zusammenhang mit einem starren Körper denselben Erfolg herbeiführen.

Zugleich macht uns diese Betrachtung freilich auch darauf aufmerksam, dass der Flechtwerkträger, den man auf solche Art erhält, geometrisch überbestimmt und darum zugleich auch statisch unbestimmt ist. Wenn man darin einen Mangel erblickt — und ein Nachtheil ist die statische Unbestimmtheit zum mindesten insofern, als die Berechnung der Stabspannungen dadurch erheblich erschwert und das Auftreten von Spannungen, die unabhängig von den Lasten (infolge von Ausführungsfehlern oder infolge von Temperaturänderungen einzelner Theile) zu Stande kommen, ermöglicht wird —, so kann man ihm nachträglich wieder dadurch abhelfen, dass man noch eine entsprechende Anzahl von Stäben aus dem Flechtwerkverbande entfernt.