Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 40. Die Zahl der nothwendigen Stäbe

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

Fünfter Abschnitt.*)

Das Fachwerk im Raume.

§ 40. Die Zahl der nothwendigen Stäbe.

Im vorigen Abschnitte handelte es sich nur um den Widerstand, den ein ebener Stabverband gegen Formänderungen innerhalb seiner eigenen Ebene zu leisten vermag und um die Spannungen, die in den Stäben durch Lasten hervorgerufen werden, die selbst alle in der Constructions-Ebene enthalten sind. Gegen Formänderungen, bei denen die Knotenpunkte aus der Constructions-Ebene heraustreten, sind dagegen die ebenen Fachwerke an sich ganz widerstandslos oder sie vermögen wenigstens einen gewissen, geringen Widerstand gegen solche Formänderungen nur insoweit zu leisten, als der Biegungswiderstand der Stäbe und die Steifigkeit der Knotenpunkte es gestatten. Daher sind auch die Lehren des vorigen Abschnittes für die Beurtheilung der Steifigkeit eines Stabverbandes nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung anwendbar, dass auf irgend eine Art ausreichende Fürsorge dafür getroffen ist, dass die Knotenpunkte nicht aus der Constructions-Ebene heraus treten können.

Hieraus erhellt, dass die Theorie des Fachwerkes erst dadurch zu einer allgemeineren Fassung gelangen kann, die allen bei ihrer praktischen Anwendung auftretenden Bedingungen

*) In diesen Abschnitt habe ich einige Abbildungen aus meiner im Jahre 1892 erschienenen Schrift „Das Fachwerk im Raume“ herüber genommen.

gerecht wird, dass man die Fachwerke als Gebilde des dreifach ausgedehnten Raumes auffasst. Dies hindert zwar nicht, dass man, wie es auch hier geschehen ist, zuerst die einfacheren Probleme des ebenen Fachwerkes erledigt und sich erst nachher in die verwickelteren Bedingungen vertieft, die sich im dreifach ausgedehnten Raume oder kürzer im „Raume“ geltend machen. Eine solche Ergänzung ist aber durchaus nöthig, um Irrthümer selbst in manchen Fällen zu vermeiden, die auf den ersten Blick ausschliesslich zur Lehre vom ebenen Fachwerke zu gehören scheinen.

Wenn nämlich ein ebener Träger nur mit Lasten behaftet ist, die in seiner eigenen Ebene liegen, wie es bei den Anwendungen sehr oft genau genug zutrifft, kommt zwar in erster Linie nur der Widerstand gegen Formänderungen in dieser Ebene in Betracht. Falls aber hierbei eine Anzahl aufeinander folgender Stäbe auf Druck beansprucht ist, wie z. B. beim Obergurt eines gewöhnlichen, einzeln aufgestellten Fachwerkbalkens, darf man bei der Berechnung dieser Stäbe auf Knickfestigkeit nicht dabei stehen bleiben, nur die Möglichkeit des Ausknickens in der Constructions-Ebene zu berücksichtigen. Bei einem Ausknicken in dieser Ebene ist nämlich als Knicklänge nur die Länge eines Stabes zwischen seinen beiden Knotenpunkten in Ansatz zu bringen, da diese Knotenpunkte durch den Stabverband gegen Bewegungen innerhalb der Ebene abgestützt sind. Bewegungen senkrecht zu seiner Ebene vermag dagegen der Stabverband nicht zu verhindern und als Knicklänge tritt daher für einen solchen Obergurt — freilich unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Knicklast für die einzelnen Abschnitte — die ganze Länge auf. Dieser Umstand ist schon manchmal von einem Constructeur, der seine Erwägungen ausschliesslich auf das Verhalten des Trägers innerhalb der Trägerebene zuschnitt, unberücksichtigt geblieben, was sich nachher bitter rächte.

Gewöhnlich verhindert man freilich Bewegungen senkrecht zur Constructions-Ebene durch Anordnung eines Querverbandes zwischen zwei oder mehr in parallelen Ebenen neben einander stehenden Bindern. Diese Querverbände haben dann zugleich die bei Brücken z. B. durch den Winddruck hervorgerufenen, senkrecht zu den Binderebenen stehenden Lasten aufzunehmen, wesshalb man sie auch als Windverbände bezeichnet. Sowie aber die Windverbände sorgfältiger ausgebildet werden, so dass auch gegen Formänderungen, die ein Heraustreten der Knotenpunkte aus den Constructions-Ebenen mit sich bringen, der Biegungswiderstand der Stäbe nicht in Anspruch genommen werden soll, sondern nur ihre Zug- und Druckfestigkeit, gelangt man zu räumlichen Fachwerken, in denen die ebenen Binder nur als Constructions-Elemente, freilich als solche, die in sich schon zu einer gewissen Einheit zusammengefasst sind, auftreten.

Wir haben hier vor Allem wieder die Frage zu beantworten, wieviel Stäbe erforderlich sind, um n Knotenpunkte, die jedenfalls nicht alle in derselben Ebene liegen dürfen, zu einer räumlichen Figur von unveränderlicher Gestalt zu verbinden. Dabei sind freilich wieder verschiedene Bildungsgesetze möglich, entsprechend jenen, die wir schon beim ebenen Fachwerke kennen lernten. Wir gehen aber wie dort zunächst von der einfachsten Art des Aufbaues oder wenigstens von jener aus, die sich bei der ersten Betrachtung als die einfachste darbietet.

Zunächst verbinden wir wieder drei der Knotenpunkte durch drei Stäbe zu einem Dreiecke, denn das Dreieck ist bei unveränderlichen Seitenlängen auch im dreifach ausgedehnten Raume keiner Gestaltänderung fähig. Ein vierter Knotenpunkt, der mit den vorigen nicht in derselben Ebene liegen darf, kann hierauf durch drei Stäbe mit diesen steif verbunden werden. Hierbei entsteht ein Tetraeder, dessen Gestalt ebenfalls unveränderlich ist, so lange sich die Stablängen nicht ändern. Der Ausnahmefall kann hier nur eintreten, wenn die vier Ecken in eine Ebene fallen, das Tetraeder selbst also als solches verschwindet und einer in der Ebene geometrisch überbestimmten, im Raume aber unendlich wenig verschieblichen, ebenen Figur Platz macht. Diesen Fall hatten wir aber schon ausgeschlossen.

Auch jeder folgende Knotenpunkt kann an die vorigen durch drei Stäbe unverschieblich angeschlossen werden, wenn nur darauf geachtet wird, dass die drei Anschlussstäbe niemals in einer Ebene liegen dürfen. Dies folgt sowohl aus der geometrischen Betrachtung, wie aus der statischen Bedingung, dass die Spannungen in den Anschlussstäben ausreichen müssen, um gegen jede Last, die an dem angeschlossenen Knotenpunkte angreifen mag, das Gleichgewicht zu sichern.

Für jeden anzuschliessenden Knotenpunkt müssen wir hiernach drei Stäbe aufwenden und nur im Anfange genügten zur Verbindung der drei Ausgangsknotenpunkte drei Stäbe. Hiernach ist die Zahl m der nothwendigen Stäbe

$$m = 3n - 6 . \tag{54}$$

Natürlich können auch hier wieder nachträglich überzählige Stäbe zwischen die bereits steif mit einander verbundenen Knotenpunkte eingeschoben werden, wodurch das räumliche Fachwerk in ein geometrisch überbestimmtes und zugleich statisch unbestimmtes übergeht. Die hierüber bereits beim ebenen Fachwerke durchgeführten Betrachtungen bleiben auch hier gültig und brauchen nicht nochmals wiederholt zu werden. In diesem Abschnitte soll übrigens nur von den geometrisch und statisch bestimmten räumlichen Fachwerken die Rede sein.

Ferner kann man auch beim räumlichen Fachwerke von den nach dem soeben besprochenen Plane aufgebauten zu Fachwerken von abweichender Gliederung durch das schon früher angewendete Mittel der Stabvertauschung übergehen. Beseitigt man nämlich einen Stab, so erhält man einen zwangläufigen Mechanismus und der damit gegebene Freiheitsgrad kann wieder beseitigt, die Steifigkeit also wieder hergestellt werden, indem man irgend zwei Knotenpunkte, die bei einer Bewegung des Mechanismus ihren Abstand ändern müssten, durch einen neuen Stab mit einander verbindet.

Die Zahl der durchschnittlich von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe folgt aus Gl. (54) zu

$$\frac{2m}{n} \quad \text{oder} \quad 6 - \frac{12}{n};$$

sie bleibt also stets kleiner als sechs. Bei einer grossen Zahl von Knotenpunkten gehen bei den gewöhnlich vorkommenden Fachwerkformen von den meisten Knotenpunkten je sechs Stäbe aus, während bei einigen Knotenpunkten die Zahl geringer ist. Jedenfalls müssen bei einem statisch bestimmten räumlichen Fachwerke Knotenpunkte vorkommen, von denen höchstens fünf Stäbe ausgehen. Andererseits dürfen von keinem Knotenpunkte weniger als drei Stäbe ausgehen und ausserdem dürfen die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe niemals alle in derselben Ebene enthalten sein, weil sonst ein Ausnahmefall (mit unendlich kleiner Verschieblichkeit des Knotenpunktes senkrecht zur Ebene der Stäbe und unendlich grossen Stabspannungen beim Angriffe einer senkrecht zu dieser Ebene stehenden Last) vorläge.

Wie beim ebenen Fachwerke die Scheibe, kann man hier den starren Körper als Fachwerkelement mit einführen. Man kann sich darunter selbst wieder ein in sich steif verbundenes räumliches Fachwerk oder auch einen zusammenhängenden Körper vorstellen. Namentlich die ganze feste Erde kann als Fachwerkbestandtheil aufgefasst werden und man gewinnt damit auf einfachste Weise den Uebergang von den nicht festgehaltenen, sondern nur in sich unverschieblichen Fachwerken zu zahlreichen Fachwerkträgern, nämlich zu allen, bei denen keine Walzenlager oder Gleitlager vorkommen.

Hat ein räumliches Fachwerk einen starren Körper und n freie (d. h. nicht zu jenem gehörige) Knotenpunkte, so beträgt die Zahl der nothwendigen Stäbe

$$m = 3n, \tag{55}$$

denn jeder freie Knotenpunkt wird durch je drei Stäbe unverschieblich angeschlossen. Dabei ist es aber nicht nöthig, dass auch wirklich von jedem Knotenpunkte drei Stäbe unmittelbar zum starren Körper geführt sind. Man kann, schon nachdem ein Knotenpunkt angeschlossen ist, einen der Verbindungsstäbe zum zweiten Knotenpunkte auch von diesem aus führen und später braucht man überhaupt keine Stäbe mehr unmittelbar vom starren Körper ausgehen zu lassen. Ausserdem kann man nachträglich auch noch Stabvertauschungen vornehmen. Es kommt also im Wesentlichen nur auf die Zahl der Verbindungsstäbe an, obschon natürlich Missgriffe in der Vertheilung der Stäbe, wie sie schon beim ebenen Fachwerke besprochen wurden, oder Ausnahmefälle, die nicht durch die Gliederung im Allgemeinen, sondern dadurch bedingt sind, dass ein Stab im Maximum oder Minimum seiner Länge steht, hierbei vermieden sein müssen.

Enthält das Fachwerk mehr als einen, also etwa r starre Körper, so kann man sich zunächst zwei derselben verbunden denken. Hierzu braucht man sechs Stäbe. Dies geht einerseits daraus hervor, dass ein starrer Körper gegen den anderen sechs Freiheitsgrade hat, so dass sechs Fesseln nöthig sind, von denen jede einen Freiheitsgrad aufhebt, und andererseits auch daraus, dass jede an dem einen Körper auftretende Last nach sechs Richtungslinien eindeutig zerlegt werden kann. Natürlich müssen dabei die schon im dritten Abschnitte besprochenen Ausnahmefälle vermieden werden: es darf sich also keine Gerade ziehen lassen, die alle sechs Stabrichtungen schneidet und namentlich dürfen nicht mehr als drei Stabrichtungen durch denselben Punkt gehen und nicht mehr als drei dürfen in derselben Ebene enthalten sein.

Auch jeder folgende starre Körper kann durch sechs Stäbe an die vorigen und jeder freie Knotenpunkt durch drei Stäbe angeschlossen werden. Im Ganzen beträgt daher die Stabzahl in diesem allgemeinen Falle

$$m = 3n + 6(r - 1) = 3n - 6 + 6r, \tag{56}$$

womit auch Gleichung (54) für $r = 0$ mit umfasst wird. Auch hier ist es natürlich nicht nöthig, dass die Stäbe genau so vertheilt sind, wie wir jetzt annehmen; man kann vielmehr nachträglich noch Stabvertauschungen vornehmen. Jedenfalls dürfen aber von keinem starren Körper weniger als sechs und von keinem freien Knotenpunkte weniger als drei Stäbe ausgehen.

In Verbindung hiermit soll sofort auch die Frage der Auflagerbedingungen erledigt werden. Nöthigt man einen Knotenpunkt, auf einer bestimmten Fläche zu bleiben, die man sich für eine unendlich kleine Verschiebung auch durch ihre Berührungsebene ersetzt denken kann, so schreibt man ihm eine Auflagerbedingung vor. Von den sechs Freiheitsgraden des starren Körpers wird nämlich dadurch, wenn sonst keine Bewegungsbeschränkung vorliegt, nur einer vernichtet. Wird der Knotenpunkt genöthigt, auf einer Linie zu bleiben, so entspricht dies zwei Auflagerbedingungen und der Körper hat, wenn kein anderes Hinderniss vorliegt, noch vier Freiheitsgrade. Wählt man nämlich den Auflagerknotenpunkt als Anfangspunkt für die Beschreibung der Bewegung, so müssen von den sechs Componenten der Vektoren $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$, durch die der Geschwindigkeitszustand gekennzeichnet wird, zwei Componenten von $\mathfrak{v}_0$ verschwinden, da $\mathfrak{v}_0$ nur in die Richtung der Auflagerbahn fallen kann. — Einem vollständig festgehaltenen Knotenpunkte sind drei Auflagerbedingungen vorgeschrieben.

Die Zahl der Auflagerbedingungen, die man einem starren Körper im Ganzen vorschreiben muss, um ihn festzuhalten, beträgt sechs, nämlich so viel als die Zahl der Freiheitsgrade, die aufzuheben sind. Die sechs Auflagerbedingungen müssen sich auf mindestens drei Knotenpunkte vertheilen. Wollte man zwei Knotenpunkte vollständig festhalten, so würde dies nur fünf von einander unabhängigen Auflagerbedingungen entsprechen. Denkt man sich nämlich einen Knotenpunkt festgehalten und den anderen längs irgend einer Linie beweglich, so kann sich dieser schon nicht mehr bewegen, da er wegen des Zusammenhangs im starren Körper seinen Abstand von dem festgehaltenen Punkte nicht zu ändern vermag.

Man kann also etwa einem Knotenpunkte eine, einem zweiten zwei und einem dritten drei Auflagerbedingungen vorschreiben. Oder man kann auch die sechs Auflagerbedingungen auf sechs Knotenpunkte vertheilen, von denen dann jeder auf einer Fläche gelagert ist, längs deren er sich, wenn sonst kein Hinderniss vorläge, frei zu verschieben vermöchte. Ausserdem vermag man auch, wie schon bei den ebenen Trägern, eine grössere Zahl von Auflagerbedingungen einzuführen, ohne den Träger dadurch statisch unbestimmt zu machen, falls man dafür eine entsprechende Zahl von Stäben aus dem Verbande herausnimmt.

Bezeichnet man die Zahl der Auflagerbedingungen mit p, so erhält man an Stelle von Gl. (54)

$$m = 3n - p, \tag{57}$$

denn um ebensoviel als p grösser wird als 6, ist m zu vermindern, damit der Träger nicht statisch unbestimmt wird.

Die Auflagerbedingungen vermag man übrigens stets auch durch Stäbe zu erfüllen, die hinreichend lang sind und von der festen Erde nach den Auflagerknotenpunkten geführt sind. Ist ein Knotenpunkt durch einen Stab mit der festen Erde verbunden, so wird er dadurch genöthigt, auf einer Kugelfläche zu bleiben, deren Halbmesser gleich der Länge des Stabes ist. Zwei Stäbe führen den Knotenpunkt auf einer Linie; er muss nämlich auf dem Kreise bleiben, in dem sich die den beiden Stäben zugehörigen Kugelflächen schneiden. Drei Stäbe halten den Knotenpunkt vollständig fest. Jeder Stab entspricht daher einer Auflagerbedingung.

Infolgedessen vermag man auch die nähere Untersuchung der Auflagerbedingungen ganz zu umgehen, indem man sie sich alle durch Stäbe ersetzt denkt, abgesehen von den festgehaltenen Knotenpunkten, die man unmittelbar als Punkte der festen Erde betrachtet. Man kann dann jeden räumlichen Fachwerkträger auch als ein Fachwerk auffassen, das die Erde als starren Körper enthält und in dem nur Verbindungsstäbe, sonst aber keine Bewegungsfesseln, die als Auflagerbedingungen zu bezeichnen wären, vorkommen.

Schliesslich sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass man bei der Theorie des ebenen Fachwerkes jedem Knotenpunkte im Grunde genommen eine Auflagerbedingung vorschreibt, von der dort freilich gar nicht ausdrücklich die Rede ist. Man setzt nämlich voraus, dass die Knotenpunkte genöthigt seien, in der Constructionsebene zu bleiben und dies entspricht in der That, sobald wir den Stabverband als ein räumliches System auffassen, einer Auflagerbedingung. Diese n Auflagerbedingungen bewirken einerseits, dass die Figur auch im Raume ihre Gestalt nicht ändern kann und sie führen andererseits zugleich eine Beschränkung in der Bewegungsfreiheit des unveränderlichen Stabgebildes herbei. Es kann sich nachher nur noch in der gemeinsamen Auflagerebene bewegen, hat also nur noch drei Freiheitsgrade. Berücksichtigt man dies, so gehen die Formeln für die nothwendige Stabzahl beim räumlichen Fachwerke ohne Weiteres in die beim ebenen Fachwerke über.

§ 41. Das Flechtwerk.

Die Formen, in denen das räumliche Fachwerk, namentlich bei einer grösseren Zahl von Knotenpunkten, aufzutreten vermag, sind überaus mannichfaltig. Unter ihnen zeichnet sich aber eine bestimmte Art des Aufbaues ihrer einfachen Gesetzmässigkeit wegen besonders aus. Auch für die Anwendungen sind Fachwerke von der Gliederung, die ich hier meine, von besonderer Wichtigkeit und es rechtfertigt sich daher, eine besondere Bezeichnung für sie einzuführen: ich nenne sie Flechtwerke.

Ein Flechtwerk ist ein räumliches Fachwerk, dessen Knotenpunkte und Stäbe sämmtlich auf einem Mantel enthalten sind, der einen inneren Raum umschliesst.

Um zu erkennen, dass räumliche Fachwerke von dieser Art möglich sind, geht man von dem Satze aus, den Euler über die Zahl der Ecken, Kanten und Seitenflächen in einem Polyeder aufgestellt hat. Der Satz gilt übrigens nur für Polyeder mit einfach zusammenhängendem Innenraume und kann für diese durch eine einfache Ueberlegung bewiesen werden.

Beginnt man nämlich beim Aufbaue des Polyeders zunächst mit einer Seitenfläche, so hat man damit schon eine Seitenfläche, eine Anzahl Kanten und ebensoviel Ecken des