# Vorlesungen über technische Mechanik

**Föppl, August**

**Leipzig, 1900**

Eliminations-Determinante

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

Nach der Lehre von den Gleichungen erhält man aber bei beliebig gegebenen endlichen Werthen der $X_0^i$ u. s. f. nur dann eindeutige und endliche Werthe für die Unbekannten, als die wir hier die $\frac{S_1}{2l_1}, \frac{S_2}{2l_2}, \ldots, \frac{S_g}{2l_g} \ldots$ auffassen können, wenn die Determinante der Coefficienten von Null verschieden ist. Wir bilden diese Determinante; sie ist von der Form

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \ldots & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \ldots & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi_m} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_m} & \ldots & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_m} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_m} \end{vmatrix} . \tag{49}$$

Darin bedeutet $\xi$ allgemein eine Knotenpunkts-Coordinate, also z. B. $x_i$ oder $y_i$ und zwar natürlich immer jene, die zu dem Knotenpunkte und der Coordinatenrichtung gehört, worauf sich die betreffende Componenten-Gleichung bezieht.

Für die praktische Ausrechnung, um etwa für einen bestimmten, genau bezeichneten Fall nachzuweisen, ob der Ausnahmefall vorliegt oder nicht, wäre Gl. (49) viel zu umständlich. Für die Ableitung eines allgemein gültigen Satzes, die wir hier anstreben, ist die Determinantenform aber recht bequem.

Wir betrachten jetzt das Fachwerk nach seinem geometrischen Verhalten. Denkt man sich jede Stablänge ein wenig geändert, so wird auch die Fachwerkfigur eine kleine Gestaltänderung erfahren. Bezeichnet man mit $\delta l_g$ die unendlich kleine Aenderung von $l_g$ und mit $\delta x_i$, $\delta y_i \ldots$ die Aenderungen der Knotenpunkts-Coordinaten, so erhält man aus Gl. (43) durch Differentiiren

$$(x_i - x_k)\,\delta x_i + (x_k - x_i)\,\delta x_k + (y_i - y_k)\,\delta y_i + (y_k - y_i)\,\delta y_k = l_g \delta l_g . \tag{50}$$

Wir denken uns für jeden Stab eine solche Gleichung angeschrieben, betrachten die $\delta l$ als gegeben und lösen die

Gleichungen nach den Unbekannten $\delta x_i$, $\delta y_i$ u. s. f. oder, nach der vorher schon gebrauchten Bezeichnung, allgemeiner nach den Unbekannten $\delta \xi$ auf. Die Zahl der Unbekannten ist nämlich gleich $2n - 3$, da durch die Art, wie wir das Coordinaten-System gegen die Figur festlegten, drei Verschiebungs-Componenten gleich Null sind und daher nicht unter den Unbekannten auftreten. Wir haben demnach ebenso viele Gleichungen ersten Grades, als Unbekannte vorkommen.

Mit Benutzung der durch Gl. (45) eingeführten Differentialquotienten lässt sich Gl. (50) auch schreiben

$$\frac{\partial f_g}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_g}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_g}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_g}{\partial y_k}\delta y_k = 2\, l_g \delta l_g .$$

Auch hier brauchen wir uns aber nicht darauf zu beschränken, nur jene Glieder anzuführen, die wirklich in der Gleichung vorkommen, sondern wir können, um auf eine symmetrische Form zu kommen, auch noch eine Reihe von Gliedern mit aufnehmen, von denen jedes schon seiner Definition nach den Werth Null hat. Wir schreiben also die Gleichung in der Form

$$\frac{\partial f_g}{\partial \xi_1}\delta \xi_1 + \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2}\delta \xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_g}{\partial \xi_m}\delta \xi_m = 2\, l_g \delta l_g ,$$

worin nun jede der $2n - 3$ oder $m$ Unbekannten $\delta \xi$ durch ein Glied vertreten ist, obschon sich nur vier dieser Glieder von Null unterscheiden. Das vollständige System der $2n - 3$ Gleichungen, die nach den $\delta \xi$ aufzulösen sind, lässt sich in dem Schema

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_1}\delta \xi_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_2}\delta \xi_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_m}\delta \xi_m = 2\, l_1 \delta l_1 \\
\dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_1}\delta \xi_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_2}\delta \xi_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_m}\delta \xi_m = 2\, l_2 \delta l_2 \\
\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
\dfrac{\partial f_g}{\partial \xi_1}\delta \xi_1 + \dfrac{\partial f_g}{\partial \xi_2}\delta \xi_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_g}{\partial \xi_m}\delta \xi_m = 2\, l_g \delta l_g \\
\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
\dfrac{\partial f_m}{\partial \xi_1}\delta \xi_1 + \dfrac{\partial f_m}{\partial \xi_2}\delta \xi_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_m}{\partial \xi_m}\delta \xi_m = 2\, l_m \delta l_m
\end{array}\right\} \quad (51)$$

zusammenfassen. Wenn die Gleichungen unabhängig von einander sind und sich nicht widersprechen, lassen sie sich nach den Unbekannten auflösen und man erkennt dies daran, ob die Determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_g}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_m} \end{vmatrix} \tag{52}$$

von Null verschieden ist. Hat sie einen von Null verschiedenen Werth, so müssen auch alle $\partial \xi$ Null sein, wenn man alle $\delta l$ gleich Null setzt. In diesem Falle sind keine unendlich kleinen Knotenpunktsverschiebungen möglich, ohne dass sich die Stablängen um Grössen von derselben Ordnung änderten, d. h. das Fachwerk ist steif. Der Ausnahmefall tritt dagegen ein, sobald die Determinante $\Delta'$ zu Null wird.

Vergleicht man $\Delta'$ in Gl. (52) mit $\Delta$ in Gl. (49), so findet man, dass sich beide Determinanten nur dadurch von einander unterscheiden, dass die Reihen mit den Colonnen vertauscht sind. Hierdurch wird aber nach einem bekannten Satze der Determinanten-Theorie an dem Werthe der Determinante nichts geändert. Die Bedingung dafür, dass die Stabspannungen für jede beliebige Belastungsart eindeutige, endliche Werthe annehmen, ist daher identisch mit der Bedingung, dass das Fachwerk unverschieblich ist und wir haben damit den Satz bewiesen:

Ein Fachwerk, das nur die nothwendige Zahl von Stäben enthält und stabil ist, ist auch statisch bestimmt und umgekehrt ist es stabil, wenn es für alle möglichen Belastungen statisch bestimmt ist.