UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Ersatz der Arbeiten durch statische Momente

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

Visual Library

des Mechanismus geleistet werden, könnte man alle Wege $3, 3'$ u. s. f. nachträglich wieder um einen rechten Winkel, entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne, zurückdrehen, um sie in ihre wahren Richtungen zu bringen. Einfacher gelangt man aber auf Grund der folgenden Ueberlegung zum Ziele. In Abb. 90 ist von Abb. 89 nur der Knotenpunkt 6 herausgezeichnet mit der an ihm angreifenden Last $\mathfrak{P}_6$ und der senkrechten Geschwindigkeit $6, 6'$. Zugleich ist $66'$ zurückgedreht nach $6, 6''$. Die Arbeit von $\mathfrak{P}_6$ ist gleich der Grösse von $\mathfrak{P}_6$ multiplicirt mit der Projektion von $6, 6''$ auf $\mathfrak{P}_6$. Projicirt man auch $6'$ auf $\mathfrak{P}_6$, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, das dem mit der Hypotenuse $6, 6''$ congruent ist. Die Länge des Projektionsstrahls von $6'$ auf $\mathfrak{P}_6$ ist daher gleich der Projektion des Weges $6, 6''$ auf $\mathfrak{P}_6$. Wir brauchen also $6, 6''$ gar nicht erst zu zeichnen, um die Arbeit von $\mathfrak{P}_6$ angeben zu können. Es genügt, $\mathfrak{P}_6$ mit der Länge des von $6'$ aus gezogenen Projektionsstrahls zu multipliciren. Dieses Produkt gibt aber das statische Moment der Kraft $\mathfrak{P}_6$ für den Momentenpunkt $6'$ an.

Abb. 90.

Ist die Arbeit von $\mathfrak{P}_6$ positiv, so ist auch das Moment positiv. Man erkennt dies zunächst aus Abb. 90. Es gilt aber auch für andere Lagen, wie man erkennt, wenn man sich $\mathfrak{P}_6$, das eine beliebige Richtung haben kann, in andere Lagen gedreht denkt. Wenn die Arbeit negativ oder Null wird, wird auch das Moment negativ oder Null und das Moment kann daher weiterhin an Stelle der Arbeit der Kraft gebraucht werden.

Durch diesen Tausch geht die Methode von Müller-Breslau in eine Momenten-Methode über, die sich auch als eine Verallgemeinerung der Ritter'schen Methode für die Berechnung der einfachen Fachwerke ansehen lässt, indem sie bei einfachen Fachwerken geradezu in diese übergeht. Man kann sie in der That auch anwenden und begründen, ohne auf die vorhergehenden kinematischen Betrachtungen, aus denen sie ursprünglich abgeleitet ist, irgendwie Bezug zu nehmen.

Nachdem der Linienzug $6', 5', 4', 3'$ wie vorher construirt ist, schreibt man nämlich für jeden dieser Punkte eine Momentengleichung an, die das Gleichgewicht der an dem zugehörigen Knotenpunkte 6, 5 u. s. f. angreifenden Last mit den Stabspannungen ausdrückt. Man kann dabei der Vollständigkeit wegen auch noch die Punkte 1′ und 2′, die mit 1 und 2 selbst zusammenfallen, als Momentenpunkte mit aufführen, obschon für diese die Momente der dazu gehörigen Kräfte sämmtlich verschwinden. Alle diese Momentengleichungen addirt man. In der Summe tritt das Moment jeder Stabspannung zweimal auf, z. B. das Moment von 5, 6 sowohl in Bezug auf 5′ als Moment der an 5 angreifenden Stabspannung, wie auch in Bezug auf 6′ für die Stabspannung an 6. Nach der Construction der Punkte 6′, 5′ u. s. f. sind aber die Hebelarme jedesmal gleich, mit Ausnahme jener, die zum Stabe 3, 6 gehören, während die Spannungen dem Wechselwirkungsgesetze zufolge an den beiden Endknotenpunkten entgegengesetzt gerichtet sind. In der Summe heben sich daher die Momente aller Stabspannungen mit jener einen Ausnahme gegen einander fort und man behält eine Gleichung, in der nur noch die Spannung des Stabes 3, 6 als Unbekannte auftritt.

Um diese Gleichung in bequemer Form anschreiben zu können, möge der aus der Zeichnung in Abb. 89 zu entnehmende Hebelarm der Last $\mathfrak{P}_n$ am Knotenpunkte n in Bezug auf n' mit p_n bezeichnet werden, wobei p_n positiv oder negativ zu rechnen ist, jenachdem das Moment von $\mathfrak{P}_n$ positiv oder negativ ist. Ferner sei die Spannung des Stabes 3, 6 mit S bezeichnet, wobei ein positiver Werth eine Zugspannung bedeutet. Der Hebelarm von S in Bezug auf 3′ sei s_3 und dies sei dem Vorzeichen nach in Uebereinstimmung mit dem Momente einer Zugspannung S am Knotenpunkte 3; ebenso bedeute s_6 den Hebelarm von S in Bezug auf 6′. Alle diese Hebelarme können nach Grösse und Vorzeichen aus der Abbildung entnommen werden.

Die Momentengleichung (oder, genauer gesagt, die aus der Summirung aller einzelnen Momentengleichungen gewonnene Gleichung) lautet dann

$$S(s_3 + s_6) + \Sigma Pp = 0,$$

woraus

$$S = -\frac{\Sigma Pp}{s_3 + s_6} \tag{39}$$

folgt. Hiermit ist die Aufgabe gelöst, denn nachdem eine Stabspannung bekannt ist, kann man die übrigen leicht durch Zeichnen des Kräfteplans ermitteln.

§ 37. Analytische Untersuchung des Ausnahmefalles.

Den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems lasse ich mit einem Knotenpunkte des Fachwerks zusammenfallen und die Richtung der X-Axe soll stets durch einen zweiten Knotenpunkt gehen. Wenn sich das Fachwerk bewegt, folgt ihm das Coordinatensystem, so dass die beiden genannten Bedingungen in jedem Augenblicke erfüllt sind. Ich denke mir sowohl die Knotenpunkte als auch die Stäbe mit je einer besonderen Nummerirung versehen. In Abb. 91 si vonnd dem ganzen Fachwerke nur zwei Knotenpunkte angegeben, die die Nummern i und k tragen, nebst dem zwischen ihnen verlaufenden Stabe g. Die übrigen Knotenpunkte und Stäbe möge man sich beliebig hinzudenken.

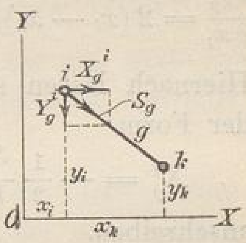

Abb. 91.

Die im Knotenpunkte i angreifende Last sei in zwei Componenten in den Richtungen der Coordinaten-Axen zerlegt, die ich mit X_0^i und Y_0^i bezeichne. Am Knotenpunkte i greifen ferner die Stabspannungen an, die man sich ebenfalls in rechtwinklige Componenten zerlegt denken kann. Die Spannung des Stabes g sei mit S_g, die Componenten der Spannung am Knotenpunkte i seien mit X_g^i und Y_g^i bezeichnet. Wenn man bedenkt, dass S_g positiv ist, wenn es eine Zugspannung bedeutet, erhält man aus Abb. 91

$$X_g^i = S_g \cdot \frac{x_k - x_i}{l_g} = - S_g \frac{x_i - x_k}{l_g}, \tag{40}$$