Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Senkrechte Geschwindigkeiten

Geschwindigkeiten AA'' und BB'' der Endknotenpunkte — oder, wenn man will, die im gleichen Verhältnisse vergrösserten Knotenpunktswege — stehen jedenfalls senkrecht zu den vom Pole aus gezogenen Strahlen OA und OB und sie verhalten sich zu einander wie die Längen dieser Strahlen, da der Centriwinkel, um den die Drehung erfolgt, in beiden Fällen derselbe ist.

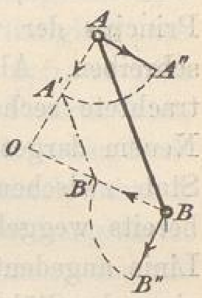

Abb. 88.

Anstatt die Geschwindigkeiten in jenen Richtungen anzutragen, die ihnen eigentlich zukommen, kann man sich auch beide um einen rechten Winkel im Sinne des Uhrzeigers gedreht denken. Nach diesem, zwar ganz willkürlichen, aber für die weiteren Untersuchungen sehr vortheilhaften Verfahren erhalten wir die auf die Polstrahlen selbst fallenden Strecken AA' und BB' als Darstellungen der Geschwindigkeiten oder auch der Knotenpunktswege bei der betrachteten Lagenänderung. Man bezeichnet diese Strecken als die „senkrechten Geschwindigkeiten" der Knotenpunkte. Sind sie gegeben, so kann man daraus nicht nur die Grössen der Geschwindigkeiten (oder die verhältnissmässigen Grössen der Knotenpunktswege), sondern auch deren Richtungen erkennen. Zu diesem Zwecke muss man sie nur nachträglich um einen rechten Winkel — entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne — zurückdrehen.

Die senkrechten Geschwindigkeiten fallen, wie man sieht, stets auf die vom Pole nach den bewegten Punkten gezogenen Strahlen. Ausserdem geht die Verbindungslinie der Endpunkte A' und B' parallel zur Stabrichtung AB. Denn wir erkannten vorher schon, dass sich die Geschwindigkeiten, also auch AA' und BB' wie OA und OB zu einander verhalten, und dies ist die Bedingung dafür, dass $A'B'$ zu AB parallel ist. Kennt man also von der Bewegung eines Stabes den Pol O und die senkrechte Geschwindigkeit AA' des einen Endknotenpunktes, so kann man durch Ziehen der Parallelen sofort auch die des anderen erhalten.

Auf Grund dieser Bemerkungen vermag man gewöhnlich leicht die Bewegung des Mechanismus, den man durch Beseitigung eines Stabes aus einem statisch bestimmten Fachwerke erhält, deutlich und für die Berechnung auf Grund des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ausreichend zu beschreiben. Als Beispiel dafür möge die schon vorher betrachtete sechseckige Grundfigur dienen, die in Abb. 89 von Neuem dargestellt ist. Nur der in Abb. 85 mit c bezeichnete Stab zwischen den Knotenpunkten 3 und 6 ist in Abb. 89 bereits weggelassen oder wenigstens nur durch eine punktirte Linie angedeutet. Als festgehalten denkt man sich am besten einen der Stäbe, die mit dem beseitigten nicht in einem Knotenpunkte zusammenstossen. In Abb. 89 wurde dazu Stab 1, 2 gewählt; eine daneben angebrachte Schraffirung soll daran erinnern, dass dieser Stab mit der Constructions-Ebene fest verbunden und daher als Gestell des aus den übrigen Stäben gebildeten Mechanismus anzusehen ist.

Man betrachte zunächst den Stab 5, 6. Der Knotenpunkt 5 vermag nur einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt 2 und dessen Halbmesser 2, 5 ist; ebenso kann sich der Punkt 6 nur auf einem um den Mittelpunkt 1 beschriebenen Kreise bewegen. Hieraus folgt, dass der Pol der Bewegung des ganzen Stabes 5, 6 auf dem Schnittpunkte der Richtungslinien von 2, 5 und 1, 6 liegt. Der Stab 5, 6 dreht sich, wie man auch sagen kann, gegen die Constructions-Ebene um ein imaginäres Gelenk, das aus den Stäben 2, 5 und 1, 6 gebildet wird. In der Zeichnung ist der Pol oder der Gelenkpunkt fortgelassen. Die senkrechten Geschwindigkeiten der Punkte 5 und 6 fallen auf die Richtungslinien der Stäbe 2, 5 und 1, 6 oder auf deren Verlängerungen, jenachdem man sich die Drehung im einen oder im entgegengesetzten Sinne vorgenommen denkt. Auf

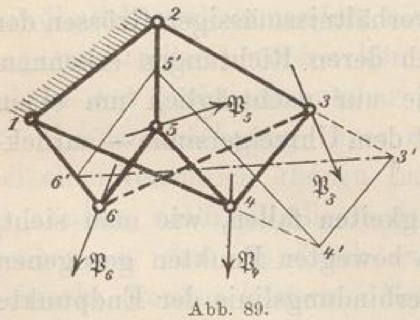

Abb. 89.

Sinn und Grösse der Drehung oder der Geschwindigkeit kommt es hier nicht an, wenn wir nur darauf achten, dass die Bewegungen aller übrigen Glieder damit in Uebereinstimmung stehen. Wir können daher einen Punkt $6'$ beliebig auf $1, 6$ annehmen, so dass $66'$ die senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 6 angibt. Zieht man $6', 5'$ parallel zu $6, 5$, so gibt $55'$ die zugehörige senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 5 an.

Hierauf gehe man zum Stabe $4, 5$ über. Auch dessen Endpunkte können sich nur auf Kreisen um die Mittelpunkte 1 und 2 bewegen; er hängt, wie der vorige, in einem imaginären Gelenke mit dem festgestellten Stabe $1, 2$ zusammen, das als Schnittpunkt der Stabrichtungen $1, 4$ und $2, 5$ gefunden werden kann. Die senkrechten Geschwindigkeiten von 4 und 5 müssen daher auf diesen beiden Stabrichtungen liegen. Die senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 5 bei der angenommenen Bewegung kennen wir aber bereits und wir brauchen daher nur die Parallele $5', 4'$ zu $5, 4$ zu ziehen, um die senkrechte Geschwindigkeit $44'$ auf der Richtungslinie des Stabes $1, 4$ zu erhalten.

Dieselbe Betrachtung lässt sich endlich auch noch für den Stab $3, 4$ wiederholen, dessen Endpunkte ebenfalls durch Stäbe mit 1 und 2 verbunden sind. Auch hier müssen die senkrechten Geschwindigkeiten beider Endpunkte auf den Richtungslinien der Verbindungsstäbe enthalten sein und da $4, 4'$ bereits bekannt ist, erhalten wir die senkrechte Geschwindigkeit $3, 3'$ des Punktes 3 durch Ziehen der Parallelen $4', 3'$ zu $4, 3$.

Hiermit sind die zusammengehörigen Lagenänderungen aller beweglichen Knotenpunkte des Mechanismus genau bezeichnet und wir können dazu übergehen, die Spannung des im Mechanismus beseitigten Fachwerkstabes $3, 6$ auf Grund des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten zu ermitteln.

Vorher sei indessen noch darauf hingewiesen, wie man bei diesem kinematischen Verfahren erkennt, ob ein Ausnahmefall vorliegt. Zu diesem Zwecke vergleicht man die Bewegungen der Knotenpunkte 3 und 6 mit einander, zwischen denen der vorher beseitigte Stab wieder eingesetzt werden soll. Wenn die durch die senkrechten Geschwindigkeiten 3, 3′ und 6, 6′ beschriebene Bewegung der beiden Knotenpunkte durch das Einsetzen des Stabes nicht gehindert wird, liegt der Ausnahmefall vor. Nun bedenke man, dass der Stab 3, 6, falls er der bisher besprochenen unendlich kleinen Bewegung kein Hinderniss bereiten soll, sich dabei jedenfalls selbst um irgend einen Pol dreht und dass die senkrechten Geschwindigkeiten seiner beiden Endpunkte auf den von diesen nach dem Pole gezogenen Strahlen enthalten sein müssen. Der Pol könnte daher nur der Schnittpunkt der Richtungslinien von 3 3′ und 6 6′ sein. Zugleich müsste aber, wie wir schon zu Anfang des Paragraphen fanden, die Verbindungslinie 3′, 6′ parallel zur Stabrichtung 3, 6 sein. Also nur dann, dann aber auch immer, wenn die Verbindungslinie 3′, 6′ parallel zu 3, 6 ausfällt, kann die vorher besprochene unendlich kleine Bewegung des Mechanismus auch noch von dem Fachwerke, das man durch Einziehen des Stabes 3, 6 erhält, ausgeführt werden, d. h. das Fachwerk ist nicht steif, sondern es liegt der Ausnahmefall vor.

Man kann diesem Schlusse auch noch eine andere, anschaulichere Deutung geben. Man vergleiche nämlich die Figur 1, 2, 3′, 4′, 5′, 6′ mit der Fachwerksfigur 1, 2, 3, 4, 5, 6. In beiden laufen alle Seiten und Diagonalen in gleicher Richtung, mit Ausnahme der letzten Seiten 3, 6 und 3′, 6′. Liegt aber der Ausnahmefall vor, so gehen auch diese in gleicher Richtung. Kann man also zu der gegebenen Grundfigur eine zweite Figur von gleicher Gliederung zeichnen, deren Seiten sämmtlich zu denen der Grundfigur parallel laufen, so liegt der Ausnahmefall vor. Das Fachwerk ist mit anderen Worten steif, wenn seine Gestalt durch die Angabe der Gliederung und der Richtungen aller Stäbe bestimmt ist. Diesen Gedanken hat Schur weiter ausgeführt, indem er es als die Hauptaufgabe der allgemeinen Theorie des ebenen statisch bestimmten Fachwerkes hinstellte, die Fachwerksfigur zu zeichnen, falls die Gliederung und die Stabrichtungen, sowie die Länge eines Stabes gegeben sind.

Um die Arbeiten zu berechnen, die von den äusseren Kräften $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ u. s. f. während der unendlich kleinen Bewegung