Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Pascal'sche Sechsecke

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

linie der Gelenke *ab* und *bc* enthalten ist. — Der soeben abgeleitete Satz spielt, nebenbei bemerkt, in der Kinematik eine wichtige Rolle.

Die Verschieblichkeit, die zwischen *c* und *a* noch bestehen bleibt, wenn nur die Gelenke *ab* und *bc* vorhanden, die zum Gelenke *ac* gehörigen Umfangsstäbe 1, 6 und 3, 4 dagegen fortgelassen sind, lässt sich hiernach auf sehr einfache Art beschreiben: der Stab *c* vermag sich gegen *a*, den zwei Freiheitsgraden entsprechend, um jeden beliebigen Pol zu drehen, der auf der Verbindungslinie der Gelenke *ab* und *bc* enthalten ist. Die Lage des Pols auf der Verbindungslinie hängt nur von dem Verhältnisse der Drehungen um beide Gelenke (nach Grösse und Vorzeichen) ab.

Das Gelenk *ac* gestattet dagegen für sich genommen nur Drehungen von *c* gegen *a* um *ac*. Tritt also das Gelenk *ac* zu den vorher schon bestehenden Verbindungen hinzu, so fragt es sich, ob beide Bewegungsmöglichkeiten, die vorher im Einzelnen vorhanden waren, mit einander verträglich sind, oder ob sie sich widersprechen. Sie vertragen sich, wenn das Gelenk *ac* ebenfalls auf die Verbindungslinie der Gelenke *ab* und *bc* fällt, weil die Drehung um *ac* dann zu jenen Bewegungen gehört, die auch schon vor Zufügung des Gelenkes *ac* möglich waren. In jedem anderen Falle widersprechen sie sich. Sobald also die drei Gelenkpunkte ein Dreieck bilden, ist jede unendlich kleine Beweglichkeit der Figur ohne eine Aenderung der Stablängen, die von gleicher Grössenordnung mit ihr wäre, ausgeschlossen.

Die Bedingung für den Ausnahmefall lässt sich mit Hülfe des Lehrsatzes von Pascal in eine Form bringen, die sich dem Gedächtnisse bequemer einprägt. Nach diesem Satze schneiden sich die Gegenseiten eines Sechsecks, dessen Eckpunkte auf einem Kegelschnitte enthalten sind, in drei Punkten, die auf einer Geraden liegen. Umgekehrt kann man durch die Eckpunkte einen Kegelschnitt (der aber auch in zwei gerade Linien zerfallen kann) legen, wenn die genannten Schnittpunkte auf einer Geraden liegen.

Die imaginären Gelenke wurden als Schnittpunkte der

Gegenseiten des Sechsecks erhalten. Wir können daher die vorher gefundene Bedingung für den Ausnahmefall einfacher dahin aussprechen, dass die aus einem Sechsecke mit drei Hauptdiagonalen gebildeten Grundfiguren trotz der genügenden Stabzahl immer dann nicht steif sind, wenn das Sechseck ein Pascal'sches ist.

Zu den Pascal'schen gehören u. A. auch die regelmässigen Sechsecke. Ein solches von etwa 70 cm Durchmesser habe ich in meinem Laboratorium aus kleinen Winkeleisen (von 13 mm Schenkellänge) zusammen nieten lassen, wobei die Diagonalen an den Kreuzungsstellen über einander weg geführt sind, so dass keine Verbindung zwischen ihnen besteht. Eine Last von 50 kg, die man in geeigneter Weise an einem Knotenpunkte angreifen lässt, bringt Formänderungen hervor, bei denen sich der Abstand anderer Knotenpunkte um 3 bis 4 mm ändert. Zum Vergleiche sei erwähnt, dass stabile Fachwerke, aus denselben Winkeleisen und in ungefähr gleichen Grössen ausgeführt, Entfernungsänderungen zwischen zwei nicht durch einen Stab mit einander verbundenen Knotenpunkten von höchstens einigen Zehntel-mm, gewöhnlich aber noch viel weniger bei Lasten von 50 kg erkennen lassen. Hiernach lässt sich das Bestehen des Ausnahmefalls beim Pascal'schen Sechsecke auch experimentell leicht nachweisen und die dabei gemachten Beobachtungen dienen zugleich dazu, eine Vorstellung davon zu geben, in welchem Maasse und Grade sich der Ausnahmefall praktisch zur Geltung bringt. Hierbei erwähne ich noch, dass die zuvor angegebenen verhältnissmässig starken Formänderungen des Kreissechsecks rein elastisch sind; bleibende Verbiegungen von erkennbarer Grösse treten bei dieser Belastung noch nicht auf.

Um ein anderes Beispiel zu geben, kehre ich zur Betrachtung von Abb. 80, S. 207 zurück. Die dort durch starke Striche hervorgehobene sechseckige Grundfigur bildet im Allgemeinen kein Pascal'sches Sechseck. Wenn aber der Obergurt des Trägers in der Mitte ebenfalls geradlinig ist, liegt der Ausnahmefall vor. Die drei imaginären Gelenke fallen dann alle ins Unendliche, liegen also alle auf einer Geraden, nämlich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene. Ein in dieser Weise aufgebauter Träger ist gegenüber beliebig gegebenen Lasten nicht widerstandsfähig. Auch schon dann, wenn die drei Punkte des Obergurts nicht genau, sondern nur nahezu auf einer Geraden liegen, ist der Träger nicht mehr brauchbar, da dann die Stabspannungen zwar nicht unendlich gross, aber doch schon sehr gross werden. — Dagegen wird der Träger auch in diesen Fällen vollkommen stabil und tragfähig, sobald man alle drei Diagonalen in der Mitte mit einander vernietet. Er ist aber dann nicht mehr statisch bestimmt, sondern hat einen überzähligen Stab und muss nach den im 6. Abschnitte auseinanderzusetzenden Lehren berechnet werden.

§ 36. Die Methode von Müller-Breslau.

Hält man in einem statisch bestimmten Fachwerke von beliebiger Gliederung einen Stab fest und entfernt irgend einen anderen Stab, so ist die Figur verschieblich, aber so, dass sich alle Knotenpunkte, sofern sie nicht in Ruhe bleiben, nur längs bestimmter Curven, also zwangläufig bewegen können. Man kann sich an dem in dieser Weise gebildeten Mechanismus an dessen Knotenpunkten irgendwelche Lasten angreifen, dadurch wieder Gleichgewicht hergestellt denken, dass längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes an den Endknotenpunkten zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte von passender Grösse angebracht werden. Durch diese werden dann in Verbindung mit den gegebenen Lasten Spannungen in den Stäben hervorgerufen, die an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen. Grösse und Richtungssinn der beiden Kräfte geben daher zugleich die Stabspannung an, die in dem Stabe, den man sich beseitigt dachte, in Wirklichkeit auftritt.

Aus dieser Ueberlegung ergibt sich ein Mittel, um die Stabspannung in irgend einem Stabe des gegebenen Fachwerks, den man sich zu diesem Zwecke beseitigt denkt, zu berechnen. Man braucht hierzu nur das Princip der virtuellen