Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Analytische Berechnung der Stabspannungen annehmen kann, als überzählige Stäbe vorkommen, worauf die übrigen so ermittelt werden können, dass an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht hergestellt wird. Natürlich kann von allen diesen unendlich vielen Werthsystemen der Stabspannungen oder „Spannungsbildern", wie man dafür oft zu sagen pflegt, nur eines wirklich zu Stande kommen. Die blossen Gleichgewichtsbedingungen genügen aber nicht, um dieses unter den zunächst als möglich erkannten herauszufinden. Dazu muss man auf die elastischen Formänderungen der Stäbe eingehen, wie später gezeigt werden wird. In diesem Abschnitte soll aber von den statisch unbestimmten Fachwerken nicht weiter die Rede sein.

Ein Verfahren, das auf alle Fälle zur Berechnung der Stabspannungen in beliebig gegliederten statisch bestimmten Fachwerken ausreicht, soll hier sofort angegeben werden, wenn es auch wegen der Umständlichkeit der Rechnung praktisch nicht gut verwendbar ist. Dafür hat es aber den Vorzug, eine grundsätzlich sehr einfache und darum auch besonders leicht verständliche Vorschrift anzugeben, nach der es immer möglich sein muss, die Stabspannungen zu finden. Es eignet sich daher besonders zur Anstellung allgemeiner Betrachtungen über das Spannungsproblem und findet seinen Platz am besten am Eingange zu diesen Untersuchungen. Die für die praktische Ausführung bequemeren Methoden folgen erst in den späteren Paragraphen.

Man denke sich alle Stäbe von 1 bis m nummerirt. Einer dieser Stäbe mit der Nummer i hat die unbekannte Stabspannung S_i, wobei durch das Vorzeichen zwischen Zug- und Druckspannung unterschieden sein soll. Nun betrachte man einen der beiden Knotenpunkte, zwischen denen der Stab i verläuft. Die Gleichgewichtsbedingung erfordert, dass die geometrische Summe aus den an ihm angreifenden Stabspannungen und der daran angebrachten Last gleich Null sein muss. Wir können diese Bedingung auch durch das Anschreiben von zwei Componentengleichungen ersetzen. Es muss also sowohl die Summe der Horizontalcomponenten als die Summe der Vertikalcomponenten aller Kräfte gleich Null sein. Die Horizontalcomponente von S_i finden wir aus S_i durch Multiplikation mit dem Cosinus des Neigungswinkels, den die Stabrichtung mit der Horizontalen bildet. Da die Gestalt des Fachwerks gegeben ist, kennt man alle diese Richtungswinkel; ausserdem kann auch das Vorzeichen der Horizontalcomponente von S_i sofort angegeben werden, indem man den Pfeil von S_i an dem Knotenpunkte so einträgt, wie er einer Zugspannung im Stabe i entspricht. Sollte nachher S_i in Wirklichkeit als Druckspannung gefunden werden, so kehrt sich ohnehin das Vorzeichen des Produktes aus S_i und dem Richtungscosinus um, weil S_i dann durch eine negative Zahl angegeben wird. Das unter der ersten Annahme bestimmte Vorzeichen bleibt daher auf jeden Fall richtig.

In jeder der beiden Componentengleichungen kommen demnach nur die Spannungen S_i u. s. f. der an dem Knotenpunkte angreifenden Stäbe als Unbekannte vor. Denn auch die äusseren Kräfte oder Lasten, sowie deren Componenten in horizontaler und vertikaler Richtung müssen als gegeben vorausgesetzt werden, wenn die von ihnen hervorgebrachten Stabspannungen berechnet werden sollen.

Nachdem in derselben Weise für alle Knotenpunkte je zwei Componentengleichungen angeschrieben sind, hat man im Ganzen $2n$ Gleichungen, in denen nur die m Stabspannungen vorkommen und die für diese sämmtlich vom ersten Grade sind. Man kann also nun die Stabspannungen durch Auflösen dieser Gleichungen berechnen. Dies führt zwar zu umständlichen Zahlenrechnungen (bei der Ermittelung der Determinanten, durch die die Lösung angegeben wird) kann aber zu keinen Schwierigkeiten anderer Art Veranlassung geben.

Hierbei ist jedoch auf einen Umstand wohl zu achten. Jedenfalls müssen nämlich die äusseren Kräfte, die als Lasten an den Knotenpunkten, im Uebrigen zwar ganz willkürlich angebracht sind, unter sich ein Gleichgewichtssystem bilden, weil sonst überhaupt kein Gleichgewicht möglich wäre. Nachdem wir aber die Gleichgewichtsbedingungen an jedem Knotenpunkte durch Aufstellung der Componentengleichungen ausgedrückt haben, ist damit die Bedingung für das Gleichgewicht der äusseren Kräfte schon mit ausgesprochen. Jene $2n$ Componentengleichungen enthalten daher mehr, als nur die Bedingungen, denen die Stabspannungen genügen müssen. Drei von ihnen — denn so gross ist die Zahl der zwischen Kräften in der Ebene bestehenden Gleichgewichtsbedingungen — dienen vielmehr zum Nachweise für das Gleichgewicht zwischen den äusseren Kräften und für die Ermittelung der Stabspannungen bleiben nur $2n - 3$ Componentengleichungen übrig.

Am einfachsten stellt man sich die Sache so vor, dass die Lasten an allen anderen Knotenpunkten bis auf zwei ganz willkürlich, ohne Rücksicht auf Gleichgewichtsbedingungen, gewählt wurden. Auch an einem der beiden übrigen Knotenpunkte mag noch die Horizontalcomponente der Last beliebig angenommen werden. Dann müssen aber, damit Gleichgewicht zwischen den äusseren Kräften bestehe, die beiden Componenten der Last am letzten Knotenpunkte, sowie die Vertikalcomponente am vorhergehenden Knotenpunkte den Gleichgewichtsbedingungen entsprechend gewählt werden. Wenn man darauf achtete, dass die beiden Knotenpunkte nicht auf derselben Vertikalen lagen, können die drei Componenten auch immer, wie man leicht einsieht, sofort in eindeutiger Weise so berechnet werden, dass das Gleichgewicht gesichert ist. Anstatt eines solchen direkten Verfahrens können wir uns dazu aber auch die drei Componentengleichungen für die betreffenden Richtungen an den beiden Knotenpunkten benutzt denken. Man schreibe diese unter den $2n$ Componentengleichungen etwa zuletzt an. Die vorausgehenden $2n - 3$ müssen dann zur Ermittelung der Stabspannungen ausreichen. Nachdem sie nach den Stabspannungen aufgelöst sind, bleiben dann in den drei letzten nur noch die drei Componenten der äusseren Kräfte als Unbekannte übrig.

Durch diese Anordnung vermag man also aus den $2n$ Gleichungen jene $2n - 3$, die zur Berechnung der Stabspannungen zu verwenden sind und jene 3, die nur die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äusseren Kräften darstellen, sofort auszusondern. Natürlich ist diese Aussonderung, wie man zugleich erkennt, noch auf sehr verschiedene Art möglich. Jedenfalls bleiben aber stets $2n-3$ Gleichungen zwischen den m unbekannten Stabspannungen zur Verfügung.

Auch hieraus erkennt man — und zwar diesmal ohne jede Voraussetzung über die Gliederung des Fachwerks —, dass die Zahl der Stäbe

$$m = 2n - 3$$

betragen muss, wenn das Fachwerk statisch bestimmt sein soll. Auch ob etwa ein Ausnahmefall vorliegt, muss sich beim Auflösen der $2n-3$ Gleichungen herausstellen. Die Gleichungen genügen nämlich nur dann zur Ermittelung der Unbekannten, wenn sie alle unabhängig von einander sind und sich nicht widersprechen. Sollte eine von ihnen schon eine nothwendige Folge der übrigen sein, so müsste sich dies bei Benutzung der Determinanten zur Auflösung darin zeigen, dass die Eliminationsdeterminante (oder die Determinante aus den Coefficienten der Unbekannten) zu Null würde. Ausserdem kann diese Determinante, auch ohne dass eine solche Abhängigkeit der Gleichungen von einander besteht, zu Null werden. Auch dies entspricht einem Ausnahmefalle. Die Stabspannungen werden dann bei beliebig gegebenen Lasten, wie aus der Lösung der Gleichungen folgt, unendlich gross. Ein solches Fachwerk wäre natürlich für die Ausführung unbrauchbar.

Schliesslich seien noch beide Fälle an einfachen Beispielen vorgeführt. Um fünf Knotenpunkte unverschieblich mit einander zu verbinden, braucht man, wie aus Gl. (33) hervorgeht, sieben Stäbe. Wollte man diese aber etwa so vertheilen, wie in Abb. 78, so würde man den Zweck trotzdem nicht erreichen. Das Viereck mit den beiden Diagonalen hat einen Stab zu viel und dieser fehlt zur Befestigung des fünften Knotenpunktes.

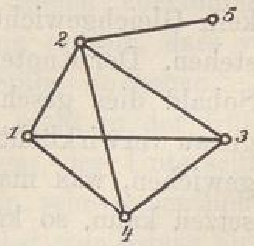

Abb. 78.

Der andere Fall kommt bei Abb. 79 vor. Hier sind die ersten 4 Knotenpunkte zu einem statisch und geometrisch bestimmten Fachwerke durch die zwischen ihnen gezogenen Stäbe verbunden und auch der letzte Knotenpunkt 5 ist vorschriftsmässig durch zwei Stäbe angeschlossen. Hier wäre also gegen die Gliederung nichts einzuwenden, wenn nicht die beiden zum Knotenpunkte 5 gehenden Stäbe auf dieselbe Grade fielen. Dadurch wird der Ausnahmefall bedingt.

Geometrisch erkennt man dies daran, dass sich Punkt 5 senkrecht zur gemeinsamen Richtungslinie beider Stäbe um eine unendlich kleine Strecke zu verschieben vermag, ohne dass sich die Stablängen um mehr als um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung zu ändern brauchten. Oder mit anderen Worten: da die Stäbe praktisch ihre Längen immer um kleine Grössen zu ändern vermögen, so entsprechen diesen Wege des Knotenpunktes 5, die weit grösser sind, als diese Längenänderungen und jedenfalls grösser, als man es bei einem Fachwerke im allgemeinen dulden kann. Die Stabverbindung ist, wie man im Volksmunde zu sagen pflegt, „wackelig“.

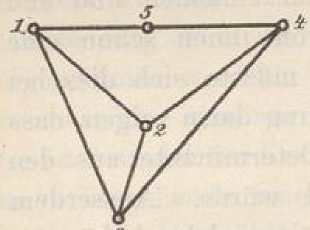

Abb. 79.

Auch vom statischen Gesichtspunkte zeigt sich, dass ein Ausnahmefall vorliegt. Sobald man eine Last am Knotenpunkte 5 anbringt, die zur Stabrichtung rechtwinklig ist, kann kein Gleichgewicht zwischen ihr und den Stabspannungen bestehen. Der Knotenpunkt wird also jedenfalls etwas ausweichen. Sobald dies geschehen ist, ist der Ausnahmefall nicht mehr genau verwirklicht. Ist der Knotenpunkt unendlich wenig ausgewichen, was man bei unnachgiebigen Stäben allein voraussetzen kann, so kann man nachher ein Kräftedreieck zeichnen, bei dem aber der der Last gegenüberliegende Winkel unendlich klein ist. Die Stabspannungen werden dann unendlich gross.

Unendlich grosse Stabspannungen sind freilich nicht mehr zu befürchten, wenn man eine Belastung des Knotenpunktes 5 vermeidet, die äusseren Kräfte also nur an den vier übrigen

Knotenpunkten angreifen lässt. Dann kommt aber der Knotenpunkt 5 überhaupt nicht mehr in Betracht und die beiden von ihm ausgehenden Stäbe können durch einen einzigen, unmittelbar zwischen 1 und 4 geführten Stab ersetzt gedacht werden Das Fachwerk 1, 2, 3, 4 ist daher für solche Lasten zwar stabil, aber zugleich statisch unbestimmt, da es einen Stab zu viel enthält. — Man thut gut, sich diese Dinge an dem einfachen Beispiele genau zu überlegen, weil in den verwickelteren Fällen, die später besprochen werden sollen, die Verhältnisse im Allgemeinen ganz ähnlich liegen.

§ 32. Die Grundfigur.

Ein statisch bestimmtes Fachwerk mit n Knoten enthält, wie wir sahen, $2n — 3$ Stäbe. Stellen wir nun für jeden Knotenpunkt fest, wie viel Stäbe grade von ihm ausgehen, und addiren alle diese Zahlen, so erhalten wir, da jeder Stab dabei zweimal gezählt wird, $4n — 6$. Die durchschnittliche Anzahl der von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe beträgt hiernach

$$\frac{4n-6}{n} \quad \text{oder} \quad 4-\frac{6}{n}.$$

Es müssen also jedenfalls Knotenpunkte vorkommen, von denen höchstens drei Stäbe ausgehen. Ist n kleiner als 6, so sinkt die durchschnittliche Stabzahl unter drei und es müssen dann auch Knotenpunkte mit nur zwei Stäben vorkommen. Wenn aber n mindestens gleich 6 ist, kann es sein, dass von keinem Knotenpunkte weniger als drei Stäbe ausgehen. In diesem Falle vermag man den Kräfteplan nicht in der früher besprochenen einfachen Weise zu entwerfen; der Unterschied gegenüber dem anderen Falle ist daher ein sehr wesentlicher.

Enthält das gegebene Fachwerk zunächst wenigstens einen Knotenpunkt, von dem nur zwei Stäbe ausgehen, so mag dieser sammt den beiden Stäben fortgelöscht werden. Findet man in dem Reste wiederum einen Knotenpunkt, an dem jetzt nur noch zwei Stäbe angreifen, so mag auch dieser mit seinen