



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Aufgaben 25-30

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

Aufgaben.

25. Aufgabe. Die in Abb. 101^a gezeichnete Grundfigur trägt die Lasten P und P' ; man soll die Stabspannungen berechnen.

Lösung. Die Figur zählt sechs Knotenpunkte und neun Stäbe, also die notwendige Zahl. Sie kann durch Verbindung des Stabdreiecks 2, 3, 4 mit dem Dreiecke 7, 8, 9 durch die drei Stäbe 1, 5, 6 entstanden gedacht werden. Man kann also auch einen Schnitt legen, der nur drei Stäbe trifft (nämlich die drei Verbindungsstäbe), deren Richtungslinien sich nicht in einem Punkte schneiden. Die Spannungen der Verbindungsstäbe findet man entweder nach der Ritter'schen Methode oder mit Hilfe der Culmann'schen Kräftezerlegung. Dabei liegt hier insofern noch ein be-

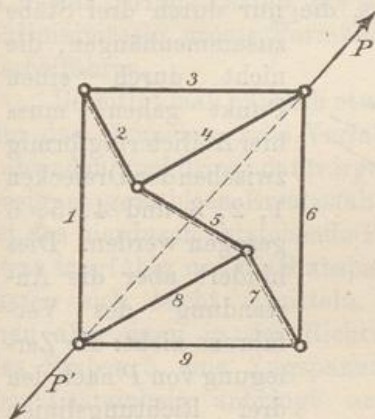


Abb. 101a.

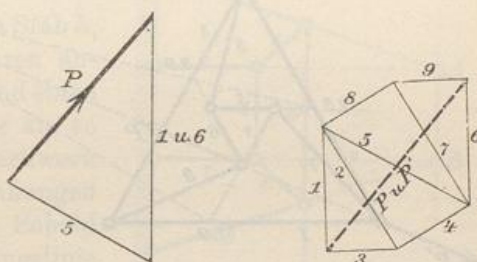


Abb. 101b.

sonderer Fall vor, als zwei der Verbindungsstäbe, nämlich 1 und 6 parallel zu einander verlaufen. In diesem Falle, der öfters vorkommt und deshalb hier noch besonders berührt werden sollte, vereinfacht sich das Culmann'sche Verfahren erheblich. Denkt man sich nämlich einen horizontalen Schnitt durch die Mitte der Figur gelegt und betrachtet das Gleichgewicht der oberen Hälfte, so folgt sofort, dass die Resultierende aus P und 5 parallel zu 1 und 6 sein muss. Man findet daher 5 durch das nebenan gezeichnete Kräfte-dreieck und zwar als Druckspannung.

Nachdem 5 bekannt ist, kann man auch den Kräfteplan in Abb. 101^b auftragen, indem man mit den Dreiecken 5, 2, 4 und 5, 7, 8 beginnt, worauf sich die Dreiecke 2, 1, 3 und 7, 9, 6 anreihen. Der Kräfteplan ist ein reciproker. Die auf Druck beanspruchten Stäbe sind in Abb. 101^a durch beigesezte Schattenstriche

hervorgehoben. — Natürlich könnte man ganz ähnlich verfahren, wenn beliebig gegebene andere Lasten an dem Fachwerke angriffen. Man müsste dann zuerst jene Lasten, die an der oberen Hälfte der Figur angreifen, zu einer Resultirenden vereinigen, die an Stelle von P nach 5 und 1, 6 zu zerlegen wäre.

26. Aufgabe. An dem in Abb. 102 gezeichneten Fachwerke greifen die Lasten P und P' an; man soll die Stabspannungen ermitteln.

Lösung. Die Aufgabe ist der vorigen ganz ähnlich; man kann sich die Figur durch Vereinigung der Dreiecke 1, 2, 3 und 4, 5, 6 durch die drei Verbindungsstäbe 7, 8, 9 entstanden denken. Dass hier das eine Dreieck von dem anderen umschlossen wird, macht nur wenig aus. Der Schnitt, den man zu führen hat, um das Ritter'sche oder Culmann'sche Verfahren anzuwenden und der die Figur in zwei Theile zerlegen muss, die nur durch drei Stäbe

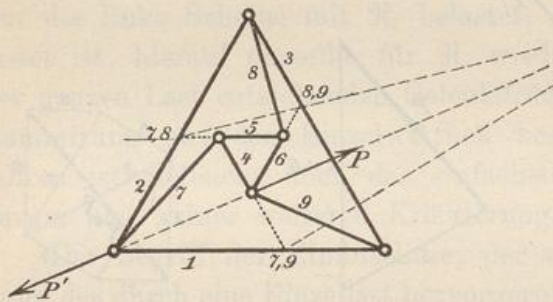


Abb. 102.

zusammenhängen, die nicht durch einen Punkt gehen, muss hier freilich ringförmig zwischen den Dreiecken 1, 2, 3 und 4, 5, 6 gezogen werden. Dies hindert aber die Anwendung des Verfahrens nicht: die Zerlegung von P nach den drei Richtungslinien

7, 8, 9 liefert sofort die Spannungen in den Verbindungsstäben.

Anstatt dessen kann man auch den Begriff des imaginären Gelenks zur Lösung benutzen. Von den drei Stäben 7, 8, 9 z. B. hängt jeder mit dem anderen durch zwei Stäbe oder, wie wir sagen können, in einem imaginären Gelenke zusammen. Die Gelenkpunkte sind in der Abbildung mit 7, 8, mit 8, 9 und mit 7, 9 bezeichnet. Auf den Stab 8 werden nur die Gelenkdrücke 7, 8 und 8, 9 übertragen; beide müssen daher gleich sein und in dieselbe Richtungslinie fallen. Zieht man die Verbindungslinie beider Gelenkpunkte, so kennt man damit auch für den Stab 9 die Richtungslinie des Gelenkdrucks 8, 9. Am Stabe 9 greifen ausserdem noch die Last P und der Gelenkdruck 7, 9 an. Die drei Kräfte müssen sich in einem Punkte schneiden und hieraus erhält man auch die Richtung des Gelenkdruckes 7, 9. Mit Hülfe eines Kräfte-dreiecks (das in der Abbildung weggelassen wurde) erhält man auch die Grössen der Gelenkdrücke und durch Zerlegung

jedes Gelenkdruckes nach den Richtungen der beiden Stäbe, die das Gelenk bilden, die Stabspannungen.

27. Aufgabe. An einer Wand ist in einer lothrechten Ebene das aus den Stäben 1 bis 8 bestehende Stabgerüst (Abb. 103) befestigt, das dazu bestimmt ist, die Last P aufzunehmen; man soll die Stabspannungen berechnen.

Lösung. Die Wand ist als eine Scheibe aufzufassen, an die vier freie Knotenpunkte angeschlossen sind. Dazu braucht man acht Stäbe und diese sind auch vorhanden. Bei der Berechnung der Stabspannungen ergibt sich jedoch, dass diese unendlich gross werden und daraus folgt, dass ein Ausnahmefall vorliegt. Das Stabgerüst ist daher gar nicht tragfähig; wenigstens vermag es Lasten nur insoweit aufzunehmen, als es die Biegezugfestigkeit der Stäbe in Verbindung mit der Steifigkeit der Knotenpunkte zulässt, d. h. nur geringe Lasten, die schon verhältnissmässig grosse Formänderungen herbeiführen.

Beseitigt man nämlich etwa Stab 5, um das Henneberg'sche Verfahren anzuwenden, und bringt dafür irgend einen geeignet gewählten Ersatzstab e an, so ist das hierdurch entstehende Fachwerk zwar tragfähig und die Stabspannungen lassen sich leicht ermitteln. Sobald man aber dann in der Richtungslinie des Stabes 5 eine Zugspannung von der Lasteinheit anbringt und einen zweiten Kräfteplan für diesen Belastungsfall zeichnet, findet man, dass der Stab e , wie er nun auch gewählt sein möge, hierbei spannungslos bleibt. Dies geht schon aus der Symmetrie der Figur hervor. Die zur horizontalen Symmetrieaxe symmetrisch liegenden Stäbe erfahren Spannungen gleicher Grösse und gleichen Vorzeichens und man kann auf diese Weise Gleichgewicht an jedem Knotenpunkte herstellen, ohne den Ersatzstab e in Anspruch zu nehmen. Dies ist aber bei dem Henneberg'schen Verfahren das Kennzeichen für den Ausnahmefall.

Noch einfacher und hier zugleich allgemeiner verwendbar ist die Untersuchung mit Hülfe der imaginären Gelenke. Stab 3 hängt mit der Wand im imaginären Gelenke A und Stab 6 mit der Wand in B zusammen. Ausserdem sind noch 3 und 6 unter sich durch die beiden parallelen Stäbe 4 und 5 verbunden, die einem im Unendlichen liegenden imaginären Gelenke C gleichwerthig sind. Die drei Gelenke A , B , C liegen aber bei der in

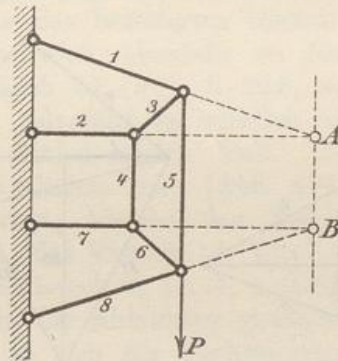


Abb. 103.

der Abbildung getroffenen Anordnung in einer Geraden und darin besteht bei dieser Art der Untersuchung das Kennzeichen des Ausnahmefalles.

Auch die Methode von Müller-Breslau führt schnell zum gleichen Ergebnisse. Man kann nämlich eine Figur zeichnen, die in der Gliederung und in allen Stabrichtungen mit der Stabfigur übereinstimmt, ohne ihr ähnlich zu sein.

Durch geeignete Aenderungen in den Stabrichtungen kann man aber unter Beibehaltung der Anordnung im Uebrigen das Stabgerüst leicht so umgestalten, dass der Ausnahmefall vermieden wird. Man braucht hierbei nur darauf zu achten, dass die Gelenke A, B, C nicht auf einer Geraden liegen dürfen. Die Berechnung der durch die Last P hervorgerufenen Stabspannungen kann alsdann nach jeder der drei vorher schon benutzten Methoden erfolgen.

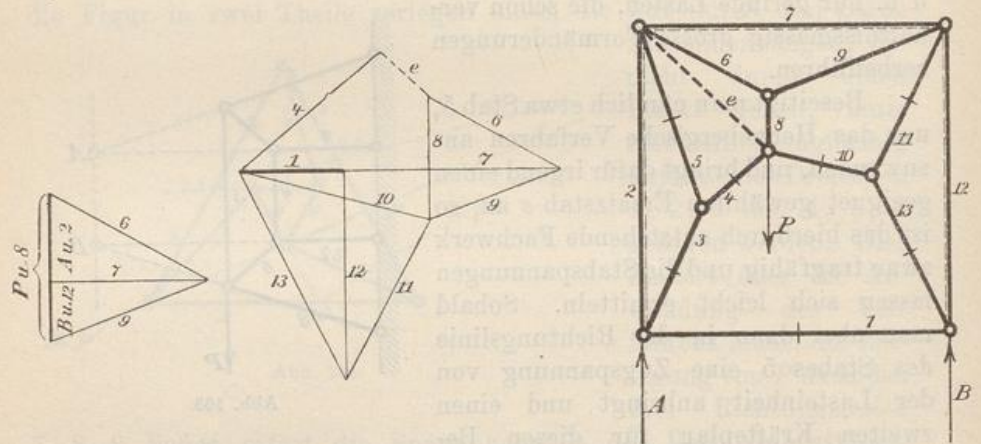


Abb. 104c.

Abb. 104b.

Abb. 104a.

28. Aufgabe. Man soll für das in Abb. 104^a gezeichnete Fachwerk, an dem sich die gegebenen äusseren Kräfte P, A und B im Gleichgewichte halten, die Stabspannungen nach dem Henneberg'schen Verfahren berechnen.

Lösung. Man beseitigt hier am besten den Stab 1, weil sich dann die Berechnung am einfachsten gestaltet und führt etwa den durch eine gestrichelte Linie angegebenen Ersatzstab e ein. Da die Richtungslinien der Kräfte A und B hier in die Richtungen der Stäbe 2 und 12 fallen, braucht man für die zugehörigen Knotenpunkte gar keine Kräftedreiecke zu zeichnen; man weiss sofort, dass die Stäbe 3 und 13 spannungslos werden, während die Stäbe 2 und 12 die äusseren Kräfte A und B allein aufzunehmen haben. Da 3 spannungslos ist, müssen auch die beiden

anderen, mit ihm von demselben Knotenpunkte ausgehenden Stäbe 4 und 5 spannungslos sein und ebenso auf der anderen Seite 10 und 11. Am Angriffspunkte von P bleiben hiernach nur die Spannungen von e und 8 übrig. Da aber P in die Richtung von 8 fällt, so ist auch e spannungslos. In dem einfachen Fachwerke, das wir durch die Stabvertauschung erhielten, gerathen demnach unter der angegebenen Belastung nur die Stäbe 2, 6, 7, 8, 9 und 12 in Spannung.

Von diesen Ergebnissen interessirt uns zunächst nur der Umstand, dass im Spannungsbilde T , wie es in § 34 genannt wurde, die Spannung T_e des Ersatzstabes gleich Null ist. Zugleich erkennt man aber auch, dass dieser besondere Werth von T_e nur zu dieser besonderen Belastung gehört; bei anderem Lastangriffe würde auch e Spannung aufzunehmen haben.

Jetzt fragt es sich, ob etwa die Spannung u_e im Ersatzstabe, die durch eine längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes 1 angebrachte Zugspannung hervorgerufen wird, ebenfalls zu Null wird. Wird sie nicht zu Null, so ist nach Gl. (36), S. 218, was auch sonst der Werth von u_e sein möge, jedenfalls die wirklich eintretende Spannung X des beseitigten Stabes gleich Null. Der Kräfteplan u lässt sich leicht zeichnen, indem man (Abb. 104^b) zuerst 1 gleich der Lasteinheit aufträgt, hierauf das Dreieck 1, 12, 13, dann das Dreieck 13, 10, 11, das Viereck 11, 12, 7, 9, das Dreieck 9, 6, 8 und schliesslich das Viereck 8, 10, 4, e zufügt. Der Kräfteplan kann zugleich, wie es in der Abbildung geschehen ist, als reciproker construiert werden, da sich die Fachwerkfigur ohne Weiteres in Polygone zerlegen lässt, so dass in jedem Stabe zwei aneinander grenzen. Nachdem u_e gefunden ist, hat es keinen Zweck, den Kräfteplan noch weiter zu führen, obschon dies leicht geschehen könnte. Ueberdies brauchen wir auch den Kräfteplan u im vorliegenden Falle nur, um uns zu überzeugen, ob u_e von Null verschieden ist.

Nachdem dies nachgewiesen ist, wissen wir, dass der Stab 1 in dem ursprünglich gegebenen Fachwerke bei der gegebenen Belastung die Spannung Null hat. Der Kräfteplan S ist daher im vorliegenden Falle identisch mit dem schon vorher besprochenen, aber noch nicht gezeichneten Kräfteplane T . In Abb. 104^c ist dies nachträglich geschehen und die Stabspannungen, die in dem gegebenen Fachwerke thatsächlich auftreten, können daraus unmittelbar entnommen werden. Gezogen sind die Stäbe 6, 8, 9, gedrückt die Stäbe 2, 7, 12; alle anderen, die in Abb. 104^a überdies durch kurze Querstriche gekennzeichnet sind, bleiben spannungslos.

Symmetrisch darf man das Fachwerk in Abb. 104^a freilich

nicht annehmen, sonst kommt man wieder auf einen Ausnahmefall, wie bei der vorigen Aufgabe. Bei der hier vorausgesetzten Belastungsart wäre freilich auch dann noch Gleichgewicht ohne unendlich grosse Stabspannungen möglich. Das Gleichgewicht wäre aber labil und bei jeder Abweichung von der symmetrischen Belastung kämen unendlich grosse Stabspannungen vor. Man erkennt dies daraus, dass u_e bei der symmetrischen Anordnung zu Null wird, während T_e bei einer unsymmetrischen Belastung von Null verschieden ist.

Dass man grade bei symmetrischen Figuren leicht auf Ausnahmefälle geführt wird, kann übrigens nicht überraschen, da die Symmetrie einer Figur selbst schon einen ausgezeichneten Fall bildet, der sich mit jenem anderen leicht deckt.

29. Aufgabe. Der in Abb. 105^a gezeichnete Dachbinder hat in der Mitte eine sechseckige, statisch bestimmte Grundfigur, da die drei sich in der Mitte kreuzenden Sechseckdiagonalen an der Kreuzungsstelle nicht mit einander verbunden sein sollen. Jeder Knotenpunkt des Obergurts trägt eine Last von 3000 kg; man soll die Stabspannungen berechnen.

Lösung. Die Spannungen der nicht zur Grundfigur gehörenden Stäbe können sofort mit Hilfe des Kräfteplans in Abb. 105^b gefunden werden. Wegen der symmetrischen Belastung genügt es, ihn nur für die linke Trägerhälfte bis zur Grundfigur hin fortzuführen; andernfalls müsste auch für die rechte Trägerhälfte der Kräfteplan in derselben Weise vom rechten Auflagerpunkte aus beginnend konstruiert werden.

Die Grundfigur ist in Abb. 105^c in doppelter Grösse herausgezeichnet. An ihren Knotenpunkten sind vor Allem die äusseren Kräfte, also sowohl die Lasten von je 3000 kg, als die bereits aus Abb. 105^b bekannten Spannungen der weggeschnittenen Stäbe anzubringen. Am links oben gelegenen Knotenpunkte ist nur der Druckstab 12 weggeschnitten. Dessen Spannung wurde im Kräfteplane Abb. 105^b mit der Last von 3000 kg zu einer Resultierenden \mathfrak{P} zusammengesetzt, die durch eine punktierte Linie angegeben ist. Für die Grundfigur kommt dann an diesem Knotenpunkte nur noch die Resultierende \mathfrak{P} als äussere Kraft in Frage. Aus \mathfrak{P} folgt sofort auch \mathfrak{P}' an dem symmetrisch gelegenen Knotenpunkte der rechten Seite.

Ebenso sind auch im Kräfteplane die Spannungen der von dem links unten liegenden Knotenpunkte weggeschnittenen Stäbe 6 und 7 zu einer Resultierenden \mathfrak{Q} vereinigt, die als äussere Kraft an der Grundfigur eingetragen ist. Ihr entspricht zugleich die symmetrisch dazu liegende Kraft \mathfrak{Q}' auf der rechten Seite.

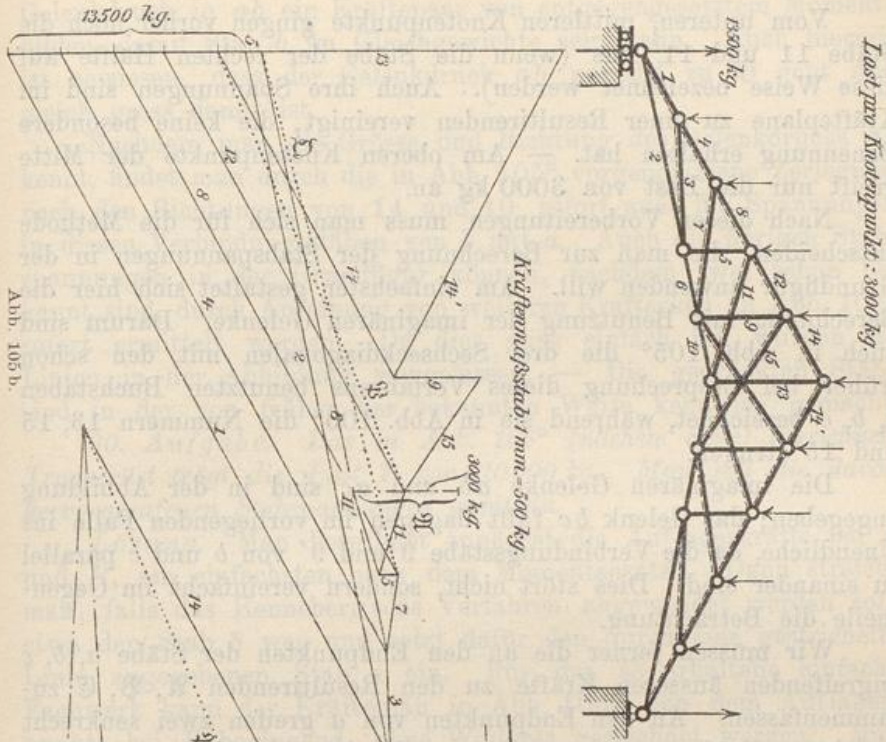
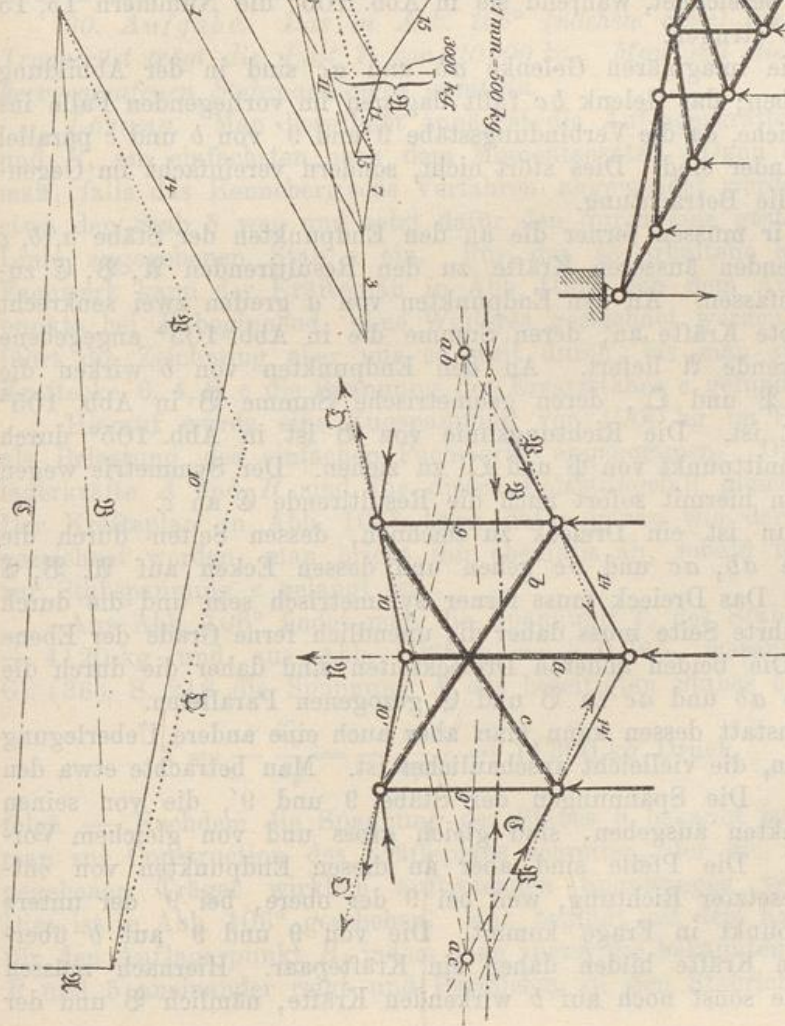


Abb. 105 b.

Abb. 105 d.



Vom unteren, mittleren Knotenpunkte gingen vorher noch die Stäbe 11 und 11' aus (wenn die Stäbe der rechten Hälfte auf diese Weise bezeichnet werden). Auch ihre Spannungen sind im Kräfteplane zu einer Resultirenden vereinigt, die keine besondere Benennung erhalten hat. — Am oberen Knotenpunkte der Mitte greift nur die Last von 3000 kg an.

Nach diesen Vorbereitungen muss man sich für die Methode entscheiden, die man zur Berechnung der Stabspannungen in der Grundfigur anwenden will. Am einfachsten gestaltet sich hier die Berechnung mit Benutzung der imaginären Gelenke. Darum sind auch in Abb. 105^c die drei Sechseckdiagonalen mit den schon früher bei Besprechung dieses Verfahrens benutzten Buchstaben a , b , c bezeichnet, während sie in Abb. 105^a die Nummern 13, 15 und 15' trugen.

Die imaginären Gelenke ab und ac sind in der Abbildung angegeben; das Gelenk bc fällt dagegen im vorliegenden Falle ins Unendliche, da die Verbindungsstäbe 9 und 9' von b und c parallel zu einander sind. Dies stört nicht, sondern vereinfacht im Gegentheile die Betrachtung.

Wir müssen ferner die an den Endpunkten der Stäbe a , b , c angreifenden äusseren Kräfte zu den Resultirenden \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} zusammenfassen. An den Endpunkten von a greifen zwei senkrecht gerichtete Kräfte an, deren Summe die in Abb. 105^b angegebene Resultirende \mathfrak{A} liefert. An den Endpunkten von b wirken die Kräfte \mathfrak{P} und \mathfrak{Q}' , deren geometrische Summe \mathfrak{B} in Abb. 105^d gebildet ist. Die Richtungslinie von \mathfrak{B} ist in Abb. 105^c durch den Schnittpunkt von \mathfrak{P} und \mathfrak{Q}' zu ziehen. Der Symmetrie wegen hat man hiermit sofort auch die Resultirende \mathfrak{C} an c .

Nun ist ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten durch die Gelenke ab , ac und bc gehen und dessen Ecken auf \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} liegen. Das Dreieck muss ferner symmetrisch sein und die durch bc geführte Seite muss daher die unendlich ferne Gerade der Ebene sein. Die beiden anderen Dreieckseiten sind daher die durch die Gelenke ab und ac zu \mathfrak{B} und \mathfrak{C} gezogenen Parallelen.

Anstatt dessen kann man aber auch eine andere Ueberlegung benutzen, die vielleicht anschaulicher ist. Man betrachte etwa den Stab b . Die Spannungen der Stäbe 9 und 9', die von seinen Endpunkten ausgehen, sind gleich gross und von gleichem Vorzeichen. Die Pfeile sind aber an diesen Endpunkten von entgegengesetzter Richtung, weil bei 9 der obere, bei 9' der untere Knotenpunkt in Frage kommt. Die von 9 und 9' auf b übertragenen Kräfte bilden daher ein Kräftepaar. Hiernach müssen auch die sonst noch auf b wirkenden Kräfte, nämlich \mathfrak{B} und der

Gelenkdruck in ab ein Kräftepaar von entgegengesetztem Momente bilden, damit Stab b im Gleichgewichte sein kann. Auch hiermit ist bewiesen, dass der Gelenkdruck ab parallel zu \mathfrak{B} geht und gleich gross damit ist.

Nachdem man die Grösse und Richtung des Gelenkdrucks ab kennt, findet man durch die in Abb. 105^d vorgenommene Zerlegung nach den Richtungen von 14 und 10' sofort auch die Spannungen in diesen Verbindungsstäben von b mit a . Auch die übrigen Stabspannungen in der Grundfigur können, nachdem zwei schon bekannt sind, durch Anreihung von weiteren Kraftecken an Abb. 105^d sofort ermittelt werden. Da dies ganz einfach ist, wurden die Linien in der Abbildung weggelassen. — Die gedrückten Stäbe sind in der von früher her bekannten Weise kenntlich gemacht.

30. Aufgabe. Das in Abb. 106^a (nächste Seite) gezeichnete Traggerüst trägt die Last P von 10000 kg. Man soll die davon hervorgerufenen Stabspannungen ermitteln.

Lösung. Man berechnet zunächst die Auflagerkräfte bei A und B , am einfachsten nach dem Momentensatze. Dann streicht man, falls das Henneberg'sche Verfahren angewendet werden soll, etwa den Stab 5 weg und setzt dafür den durch eine gestrichelte Linie angegebenen Stab e ein. Für das so erhaltene einfache Fachwerk kann der Kräfteplan in Abb. 106^b, von dem Auflagerpunkte bei B beginnend, ohne Weiteres gezeichnet werden. Man führt die Zeichnung aber nur so weit durch, bis man aus dem Kraftecke 6, 4, 8, e die Spannung des Ersatzstabes e gefunden hat.

Hierauf wurde eine Zugspannung von 1000 kg im Stabe 5 als Belastung des einfachen Fachwerks angenommen. Die Auflagerkräfte A und B sind für diesen Belastungsfall gleich Null. Der Kräfteplan in Abb. 106^c kann dafür genau wie der vorige gezeichnet werden; man bricht ihn ebenfalls ab, sobald man bis zur Stabspannung e gelangt ist.

Aus Abb. 106^b findet man die Spannung T_e des Stabes e zu + 4120 kg und aus Abb. 106^c $u_e = + 0,365$, woraus nach Gl. (36), S. 218 die Spannung X des beseitigten Stabes 5

$$X = - \frac{T_e}{u_e} = - \frac{4120}{0,365} = 11300 \text{ kg Druck}$$

folgt. — Nachdem die Spannung des Stabes 5 bekannt ist, kann man zur Construction des Kräfteplans schreiten, der die in dem gegebenen Träger wirklich auftretenden Spannungen vereinigt. Dies ist in Abb. 106^d geschehen. Man beginnt mit dem Kraftecke für den Auflagerpunkt B , indem man zuerst die bekannten Kräfte B und 5 aneinander reiht und Parallelen zu den Stabrichtungen

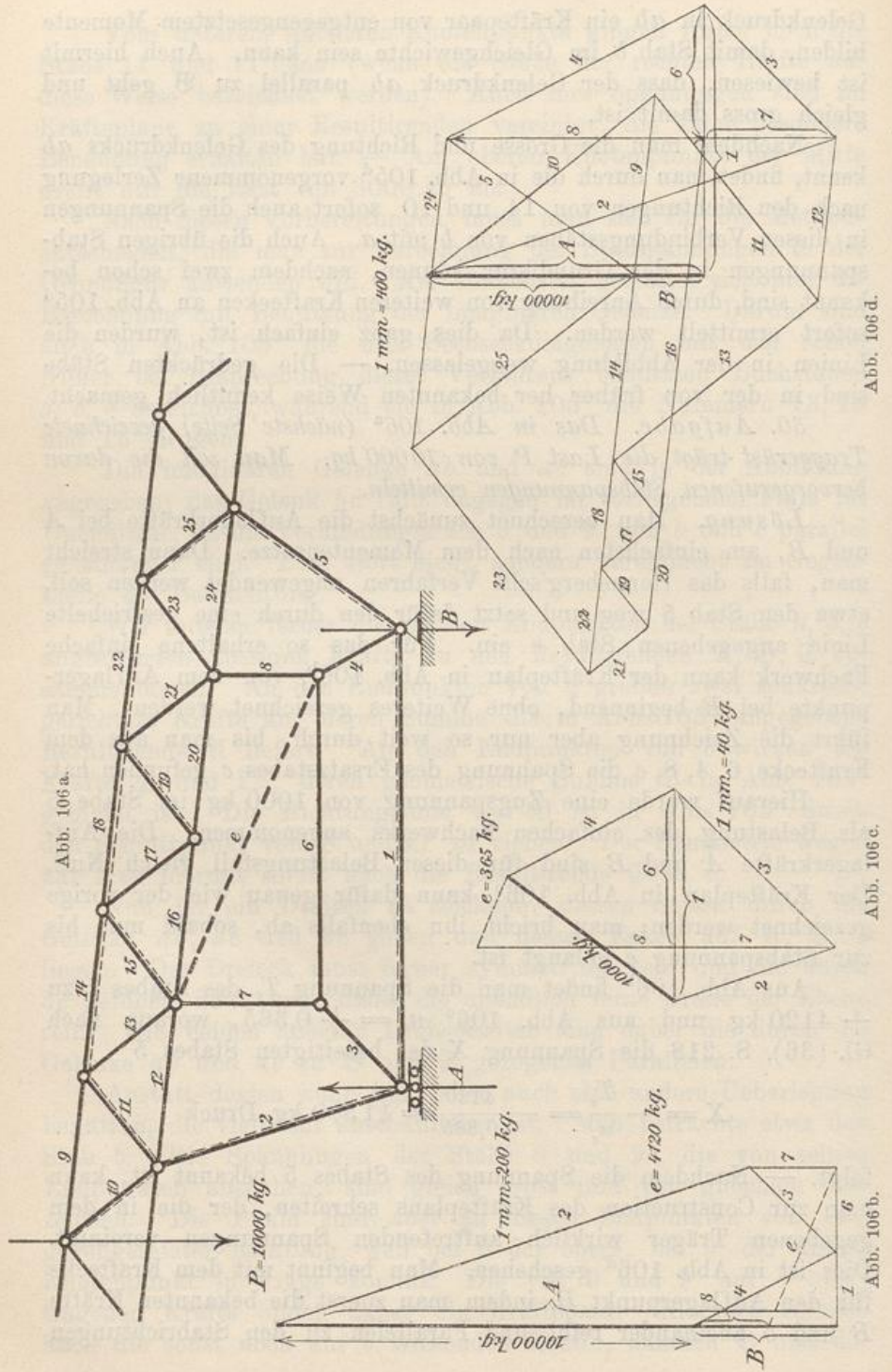


Abb. 106 a.

Abb. 106 d.

Abb. 106 c.

Abb. 106 b.

1 und 4 zieht. Dann folgen die Kraftecke A , 1, 2, 3 und 3, 6, 7. Bei dem dann folgenden Dreiecke 6, 4, 8 hat man noch eine Probe für die Richtigkeit der vorausgegangenen Bestimmung der Stabspannung 5. Von den drei Kräften sind nämlich 4 und 6 bereits bekannt und die dritte Seite des Dreiecks muss daher von selbst in die Richtung des Stabes 8 fallen. Nachher fehlen nur noch die Stabspannungen in der durch das obere Dreiecksfachwerk gebildeten Scheibe. Man zeichnet zuerst das Kräftradreieck P , 9, 10, dann das Viereck 10, 2, 11, 12 u. s. f. Die bereits ermittelten Stabspannungen 2, 7, 8, 5 sind nämlich neben P als die an der Scheibe angreifenden Lasten aufzufassen und der reciproke Kräfteplan kann daher leicht in gewöhnlicher Weise bis zum anderen Ende hin fortgesetzt werden. Die nach links und rechts hin an der oberen Scheibe noch übergreifenden Stäbe, die keine Nummern erhielten, sind bei der gegebenen Laststellung spannungslos. — Die Stabspannungen 16 und 20, sowie 14, 18 und 22 überdecken sich im Kräfteplane theilweise, worauf beim Abgreifen der Strecken wohl zu achten ist.

Anmerkung. Man hätte die Aufgabe auch mit Hülfe der imaginären Gelenke lösen können. Die obere Scheibe und die Stäbe 3 und 4 hängen nämlich paarweise unter einander durch imaginäre Gelenke zusammen, die durch die Schnittpunkte der Stabrichtungen 2 und 7, ferner 5 und 8, sowie 1 und 6 gebildet werden. Man hätte dann ein Gelenkdruckdreieck zu zeichnen, dessen Seiten durch diese Gelenkpunkte gehen und dessen Ecken auf den Richtungen der äusseren Kräfte P , A und B liegen. Diese Ueberlegung gestattet zugleich den Ausnahmefall zu erkennen, der bei der Anordnung des Stabgerüsts vermieden werden muss. Die drei Gelenke dürfen nämlich nicht auf einer Geraden liegen, d. h. die Verbindungslinie der Schnittpunkte von 2 und 7 und von 5 und 8 darf nicht parallel zu den Stabrichtungen 1 und 6 gehen. — In dieser Hinsicht gleicht übrigens, wie man leicht bemerkt, der hier besprochene Fall vollständig dem schon in Aufgabe 27 untersuchten.