Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 39. Der Dreigelenkbogen

sprechende Momentenfläche construiren, worauf man ein zweites Seilpolygon darüber legt, das zu unter sich gleichen Lasten an den Hängeeisen gehört und dessen Horizontalschub so bestimmt wird, dass das Moment in G mit dem vorigen gleich gross wird. Die zwischen diesem Parabelpolygone und dem vorigen Seilpolygone eingeschlossene Fläche gibt die Momentenfläche für den Versteifungsträger an. Es würde hier zu weit führen, das Verfahren noch eingehender zu besprechen; diese Andeutungen müssen daher genügen.

Bezeichnet man allgemein die Zahl der Auflagerbedingungen mit p, so erhält man für die nothwendige Stabzahl, also für die Zahl der Stäbe im statisch bestimmten Träger,

$$m = 2n - p; \tag{53}$$

denn diese Formel gilt zunächst für $p = 3$ und da man für jede weitere Auflagerbedingung einen Stab fortzunehmen hat, bleibt sie auch für grössere Werthe von p gültig. Natürlich muss man zugleich darauf achten, dass kein Ausnahmefall vorliegt.

§ 39. Der Dreigelenkbogen.

Für den schon im Anschlusse an Abb. 95 besprochenen Fachwerkbogen mit drei Gelenken soll die Betrachtung noch etwas weiter durchgeführt werden. Es handelt sich dabei hauptsächlich um die Berechnung der Auflagerkräfte und des im Scheitel übertragenen Gelenkdruckes, denn die Spannungen in den beiden Scheiben können, nachdem die äusseren Kräfte gefunden sind, auf bekannte Weise ermittelt werden. Da Gestalt und Gliederung der Scheiben für die Ermittelung der Auflagerkräfte gleichgültig sind, wurden die Scheiben in Abb. 98 nur durch schraffirte Flächen von beliebigem Umrisse angegeben.

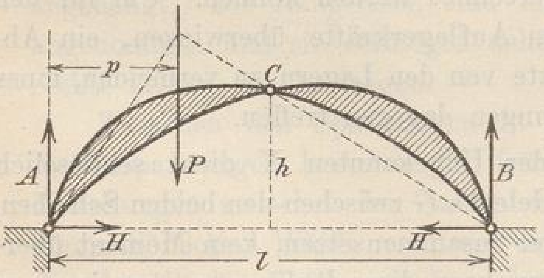

Abb. 98.

In Abb. 98 ist angenommen, dass nur eine Einzellast an einer der beiden Scheiben angebracht sei. Um die von ihr hervorgerufenen Gelenkdrücke zu ermitteln, bedenke man, dass an der unbelasteten Scheibe nur zwei Kräfte angreifen, die in den Gelenken B und C auf sie übertragen werden. Damit Gleichgewicht bestehe, müssen beide in dieselbe Richtungslinie, also in die Verbindungslinie der Punkte B und C fallen. Hiermit ist die Richtung des Gelenkdruckes in C auch für die andere Scheibe bekannt. An dieser halten sich drei Kräfte im Gleichgewichte, deren Richtungslinien sich in einem Punkte treffen müssen. Verlängert man also BC bis zum Schnitte mit der Richtungslinie der Last P, so muss durch diesen Punkt auch der in A übertragene Auflagerdruck gehen. Es bleibt nur noch übrig, die Kraft P nach den beiden Richtungslinien zu zerlegen, was etwa mit Hülfe eines Kräftedreiecks geschehen kann.

Anstatt dessen kann man die durch P hervorgerufenen Auflagerkräfte auch durch Rechnung bestimmen. Dabei sei vorausgesetzt, dass die Auflager A und B in gleicher Höhe liegen. Zerlegt man jeden Auflagerdruck in eine vertikale und eine horizontale Componente, so folgt zunächst aus der Bedingung für das Gleichgewicht des ganzen Trägers gegen Verschieben in der horizontalen Richtung, dass die beiden Horizontalcomponenten H von gleicher Grösse sein müssen, wenigstens dann wenn die Last P lothrecht gerichtet ist. Die vertikalen Componenten erhält man aus Momentengleichungen für die Auflagerpunkte zu

$$A = P\frac{l-p}{l}; \quad B = P\frac{p}{l},$$

also ebenso gross, als wenn die Last P an einem Balkenträger angebracht wäre, der die gleiche Spannweite überdeckte.

Um den Horizontalschub H zu finden, betrachtet man das Gleichgewicht einer der beiden Scheiben für sich. In Bezug auf C als Momentenpunkt erhält man für die unbelastete Scheibe die Momentengleichung

$$Hh = B\frac{l}{2} \quad \text{und daher} \quad H = \frac{Pp}{2h}.$$

Diese Gleichung gilt indessen nur so lange, als p zwischen 0 und $\frac{l}{2}$ liegt. Wird p grösser, so ist dafür der Abstand $l - p$ vom anderen Auflager einzuführen und der Ausdruck für H lautet

$$H = \frac{P(l-p)}{2h}.$$

Trägt man die Abstände p als Abscissen und den von der Lasteinheit, wenn sie an der Stelle p angebracht wird, hervorgerufenen Horizontalschub als Ordinate in einem beliebigen Maassstabe auf, so erhält man die in Abb. 99 gezeichnete graphische Darstellung für das Abhängigkeitsgesetz zwischen dem Horizontalschube und der Laststellung. Die gebrochene Linie, die die Endpunkte aller Ordinaten verbindet, wird als die Einflusslinie für H bezeichnet. Mit Hülfe der Einflusslinie kann man für jedes beliebige System lothrechter Lasten den zugehörigen Horizontalschub berechnen, indem man jede Last mit der Verhältnisszahl multiplicirt, die von der auf ihrer Richtungslinie gelegenen Ordinate der Einflusslinie angegeben wird, und alle Produkte addirt.

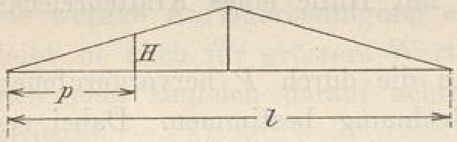

Abb. 99.

Denkt man sich bei einem beliebig gegebenen Lastensysteme den Auflagerdruck am linken Auflager mit der nächst gelegenen Last zusammengesetzt, die Resultirende mit der folgenden Last u. s. f., so erhält man ein Seileck. Da sich auch der Gelenkdruck im Scheitelgelenke und der Auflagerdruck am anderen Trägerende unter diesen Resultirenden befinden, muss das Seileck auch durch diese Gelenkpunkte gehen. Die Aufgabe, die Gelenkdrücke für den Dreigelenkbogen zu ermitteln, kommt daher im Wesentlichen auf dasselbe hinaus wie die Aufgabe, zu gegebenen Lasten ein Seileck zu zeichnen, das durch drei vorgeschriebene Punkte geht.

Für die Lösung dieser einfachen Aufgabe hat man schon viele Wege ausgedacht. Man kann z. B. mit einem Seilecke beginnen, das zunächst nur durch einen der drei Punkte geht, dann unter Benutzung des in § 11 bewiesenen Satzes durch Verschieben des Pols im Kräfteplane ein zweites daraus ableiten, das durch zwei Punkte geht und durch nochmalige Anwendung desselben Verfahrens ein drittes, das alle drei Bedingungen erfüllt.

Ein anderes Verfahren besteht darin, die gegebenen Lasten zunächst durch ein beliebiges Seilpolygon zu verbinden und mit dessen Hülfe (nach § 10) sowohl die Resultirenden $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_r$ der an der linken und rechten Scheibe, einzeln genommen, angreifenden Lasten als auch die Gesammtresultirende $\mathfrak{R}$ aller Lasten zu ermitteln. Hierauf beachte man, dass sich die Gelenkdrücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die zu den Gelenken A, B, C gehören, paarweise auf den Richtungslinien der drei Resultirenden schneiden müssen, nämlich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{R}_r$. Die Richtungslinien von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bestimmen demnach ein Dreieck, dessen Seiten durch die Punkte A, B, C gehen und dessen Ecken auf den drei parallelen (oder bei nicht parallelen Lasten wenigstens in einem Punkte sich schneidenden) Richtungslinien $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_l$, $\mathfrak{R}_r$ liegen müssen. Wir haben also dieselbe Aufgabe zu lösen wie schon in § 35.

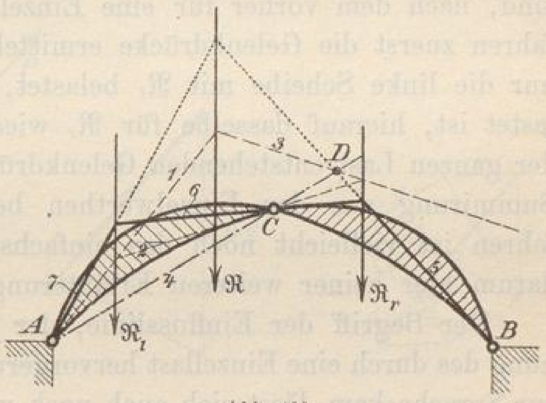

Abb. 100.

In Abb. 100 ist dies ausgeführt. Die Einzellasten und das zu ihrer Zusammensetzung dienende Seilpolygon sind weggelassen, die Richtungslinien der drei Resultirenden daher als unmittelbar gegeben angenommen worden. Man ziehe zuerst die Dreieckseite 1 von A aus in beliebiger Richtung, hierauf 2 durch C und 3 durch den Schnittpunkt von 1 mit $\mathfrak{R}$. Dadurch erhält man ein Dreieck 1, 2, 3, das fünf von den sechs Bedingungen erfüllt; nur die Seite 3 geht nicht durch den vorgeschriebenen Punkt B. Ein zweites Dreieck, das dieselben fünf Bedingungen erfüllt, geht in die durch A und C gezogene Linie 4 über. Durch den Schnittpunkt D von 4 mit 3 muss daher die dritte Seite jedes anderen Dreiecks gehen, das denselben fünf Bedingungen genügt, also auch jenes, das zugleich die sechste Bedingung erfüllt. Man zieht hiernach 5 von B aus durch D und erhält so das gesuchte Dreieck 5, 6, 7. Nachdem die Richtungslinien der Gelenkdrücke bekannt sind, ergeben sich ihre Grössen durch einfache Kräftezerlegungen.

Natürlich kann man auch, nachdem $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_r$ gefunden sind, nach dem vorher für eine Einzellast beschriebenen Verfahren zuerst die Gelenkdrücke ermitteln, die entstehen, wenn nur die linke Scheibe mit $\mathfrak{R}_l$ belastet, die andere aber unbelastet ist, hierauf dasselbe für $\mathfrak{R}_r$ wiederholen und die unter der ganzen Last entstehenden Gelenkdrücke durch geometrische Summirung aus den Einzelwerthen bestimmen. Dieses Verfahren ist vielleicht noch das einfachste, bedarf aber gerade darum hier keiner weiteren Erläuterung.

Der Begriff der Einflusslinie, der vorher bei der Berechnung des durch eine Einzellast hervorgerufenen Horizontalschubs zur Sprache kam, lässt sich auch noch weiter verwerthen. Man kann sich die Aufgabe stellen, die Spannung irgend eines beliebig herausgegriffenen Stabes für wechselnde Stellungen einer Einzellast, die gleich der Belastungseinheit genommen wird, zu berechnen und diese Spannung, wie im früheren Falle H, als Ordinate zu einer Abscisse p aufzutragen, die die Laststellung angibt. Nach der Ritter'schen Methode lässt sich leicht ein Ausdruck für die Stabspannung, der sie als Function von p darstellt, ableiten. Er ist vom ersten Grade, wechselt aber die Form, wenn die Last aus einem Gebiete (links oder rechts vom Schnitte oder links oder rechts vom Scheitelgelenke) in ein anderes übertritt. Die Einflusslinie für die Stabspannung setzt sich daher ebenfalls aus einem gebrochenen Zuge gerader Linien zusammen. Die weiteren Ausführungen darüber gehören nicht mehr zur Mechanik, sondern zur Constructionslehre.