UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 36. Die Methode von Müller-Breslau

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

Visual Library

ins Unendliche, liegen also alle auf einer Geraden, nämlich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene. Ein in dieser Weise aufgebauter Träger ist gegenüber beliebig gegebenen Lasten nicht widerstandsfähig. Auch schon dann, wenn die drei Punkte des Obergurts nicht genau, sondern nur nahezu auf einer Geraden liegen, ist der Träger nicht mehr brauchbar, da dann die Stabspannungen zwar nicht unendlich gross, aber doch schon sehr gross werden. — Dagegen wird der Träger auch in diesen Fällen vollkommen stabil und tragfähig, sobald man alle drei Diagonalen in der Mitte mit einander vernietet. Er ist aber dann nicht mehr statisch bestimmt, sondern hat einen überzähligen Stab und muss nach den im 6. Abschnitte auseinanderzusetzenden Lehren berechnet werden.

§ 36. Die Methode von Müller-Breslau.

Hält man in einem statisch bestimmten Fachwerke von beliebiger Gliederung einen Stab fest und entfernt irgend einen anderen Stab, so ist die Figur verschieblich, aber so, dass sich alle Knotenpunkte, sofern sie nicht in Ruhe bleiben, nur längs bestimmter Curven, also zwangläufig bewegen können. Man kann sich an dem in dieser Weise gebildeten Mechanismus an dessen Knotenpunkten irgendwelche Lasten angreifen, dadurch wieder Gleichgewicht hergestellt denken, dass längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes an den Endknotenpunkten zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte von passender Grösse angebracht werden. Durch diese werden dann in Verbindung mit den gegebenen Lasten Spannungen in den Stäben hervorgerufen, die an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen. Grösse und Richtungssinn der beiden Kräfte geben daher zugleich die Stabspannung an, die in dem Stabe, den man sich beseitigt dachte, in Wirklichkeit auftritt.

Aus dieser Ueberlegung ergibt sich ein Mittel, um die Stabspannung in irgend einem Stabe des gegebenen Fachwerks, den man sich zu diesem Zwecke beseitigt denkt, zu berechnen. Man braucht hierzu nur das Princip der virtuellen

Geschwindigkeiten für eine unendlich kleine Bewegung des Mechanismus anzuschreiben. Die Summe der Arbeitsleistungen aller äusseren Kräfte muss, damit Gleichgewicht bestehe, gleich Null sein. Zu den äusseren Kräften an dem Mechanismus gehören ausser den gegebenen Lasten auch die Kräfte, die man an den Endknotenpunkten des beseitigten Stabes als Ersatz für dessen Stabspannung anbringen muss. Deren Grösse (mit Einschluss des Vorzeichens) bildet die einzige Unbekannte in der Arbeitsgleichung, denn die Knotenpunktswege während der unendlich kleinen Lagenänderung lassen sich aus der gegebenen Gestalt des Fachwerks und des aus ihm hervorgegangenen Mechanismus ermitteln. Die inneren Kräfte des Mechanismus, also die in ihm vorkommenden Stabspannungen leisten während der Bewegung keine Arbeit, da die Stablängen hierbei unveränderlich sind. Dies geht schon aus den Lehren des ersten Bandes hervor.

Nachdem ich selbst schon früher auf die Möglichkeit der Berechnung der Stabspannungen auf diesem Wege hingewiesen hatte, gab Müller-Breslau ein einfaches Verfahren dafür an, wie die Knotenpunktswege — zunächst wenigstens bei den gewöhnlich vorkommenden, nicht allzu verwickelten Fällen — bequem ermittelt werden können. Hierdurch wurde das Verfahren erst praktisch nutzbar gemacht.

In der Zeichnung muss man sich die Knotenpunktswege bei einer unendlich kleinen Lagenänderung, um sie auftragen zu können, natürlich alle in demselben Verhältnisse vergrössert denken, so dass sie durch endliche Strecken zur Darstellung gebracht werden können. Man macht dies so, dass man an Stelle der Knotenpunktswege die Knotenpunkts-Geschwindigkeiten abträgt. Die Knotenpunktswege können aus diesen durch Multiplikation mit dem Zeitelemente dt, während dessen man sich die Bewegung ausgeführt denkt, erhalten werden.

Man betrachte zunächst die Bewegung irgend eines Stabes AB in Abb. 88, der zu dem Mechanismus gehören mag. Jedenfalls kann die Bewegung in die unendlich benachbarte Lage als Drehung um irgend einen Pol O aufgefasst werden. Die

Geschwindigkeiten AA'' und BB'' der Endknotenpunkte — oder, wenn man will, die im gleichen Verhältnisse vergrösserten Knotenpunktswege — stehen jedenfalls senkrecht zu den vom Pole aus gezogenen Strahlen OA und OB und sie verhalten sich zu einander wie die Längen dieser Strahlen, da der Centriwinkel, um den die Drehung erfolgt, in beiden Fällen derselbe ist.

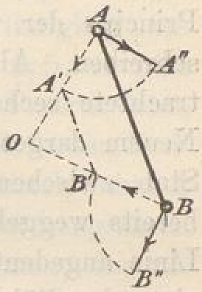

Abb. 88.

Anstatt die Geschwindigkeiten in jenen Richtungen anzutragen, die ihnen eigentlich zukommen, kann man sich auch beide um einen rechten Winkel im Sinne des Uhrzeigers gedreht denken. Nach diesem, zwar ganz willkürlichen, aber für die weiteren Untersuchungen sehr vortheilhaften Verfahren erhalten wir die auf die Polstrahlen selbst fallenden Strecken AA' und BB' als Darstellungen der Geschwindigkeiten oder auch der Knotenpunktswege bei der betrachteten Lagenänderung. Man bezeichnet diese Strecken als die „senkrechten Geschwindigkeiten“ der Knotenpunkte. Sind sie gegeben, so kann man daraus nicht nur die Grössen der Geschwindigkeiten (oder die verhältnissmässigen Grössen der Knotenpunktswege), sondern auch deren Richtungen erkennen. Zu diesem Zwecke muss man sie nur nachträglich um einen rechten Winkel — entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne — zurückdrehen.

Die senkrechten Geschwindigkeiten fallen, wie man sieht, stets auf die vom Pole nach den bewegten Punkten gezogenen Strahlen. Ausserdem geht die Verbindungslinie der Endpunkte A' und B' parallel zur Stabrichtung AB. Denn wir erkannten vorher schon, dass sich die Geschwindigkeiten, also auch AA' und BB' wie OA und OB zu einander verhalten, und dies ist die Bedingung dafür, dass $A'B'$ zu AB parallel ist. Kennt man also von der Bewegung eines Stabes den Pol O und die senkrechte Geschwindigkeit AA' des einen Endknotenpunktes, so kann man durch Ziehen der Parallelen sofort auch die des anderen erhalten.

Auf Grund dieser Bemerkungen vermag man gewöhnlich leicht die Bewegung des Mechanismus, den man durch Beseitigung eines Stabes aus einem statisch bestimmten Fachwerke erhält, deutlich und für die Berechnung auf Grund des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ausreichend zu beschreiben. Als Beispiel dafür möge die schon vorher betrachtete sechseckige Grundfigur dienen, die in Abb. 89 von Neuem dargestellt ist. Nur der in Abb. 85 mit c bezeichnete Stab zwischen den Knotenpunkten 3 und 6 ist in Abb. 89 bereits weggelassen oder wenigstens nur durch eine punktirte Linie angedeutet. Als festgehalten denkt man sich am besten einen der Stäbe, die mit dem beseitigten nicht in einem Knotenpunkte zusammenstossen. In Abb. 89 wurde dazu Stab 1, 2 gewählt; eine daneben angebrachte Schraffirung soll daran erinnern, dass dieser Stab mit der Constructions-Ebene fest verbunden und daher als Gestell des aus den übrigen Stäben gebildeten Mechanismus anzusehen ist.

Man betrachte zunächst den Stab 5, 6. Der Knotenpunkt 5 vermag nur einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt 2 und dessen Halbmesser 2, 5 ist; ebenso kann sich der Punkt 6 nur auf einem um den Mittelpunkt 1 beschriebenen Kreise bewegen. Hieraus folgt, dass der Pol der Bewegung des ganzen Stabes 5, 6 auf dem Schnittpunkte der Richtungslinien von 2, 5 und 1, 6 liegt. Der Stab 5, 6 dreht sich, wie man auch sagen kann, gegen die Constructions-Ebene um ein imaginäres Gelenk, das aus den Stäben 2, 5 und 1, 6 gebildet wird. In der Zeichnung ist der Pol oder der Gelenkpunkt fortgelassen. Die senkrechten Geschwindigkeiten der Punkte 5 und 6 fallen auf die Richtungslinien der Stäbe 2, 5 und 1, 6 oder auf deren Verlängerungen, jenachdem man sich die Drehung im einen oder im entgegengesetzten Sinne vorgenommen denkt. Auf

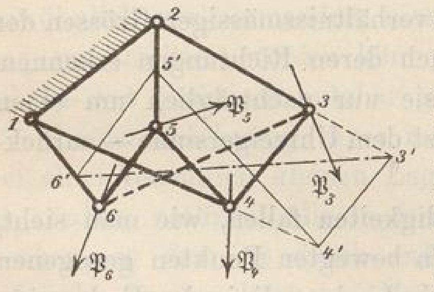

Abb. 89.

Sinn und Grösse der Drehung oder der Geschwindigkeit kommt es hier nicht an, wenn wir nur darauf achten, dass die Bewegungen aller übrigen Glieder damit in Uebereinstimmung stehen. Wir können daher einen Punkt 6′ beliebig auf 1, 6 annehmen, so dass 66′ die senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 6 angibt. Zieht man 6′, 5′ parallel zu 6, 5, so gibt 55′ die zugehörige senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 5 an.

Hierauf gehe man zum Stabe 4, 5 über. Auch dessen Endpunkte können sich nur auf Kreisen um die Mittelpunkte 1 und 2 bewegen; er hängt, wie der vorige, in einem imaginären Gelenke mit dem festgestellten Stabe 1, 2 zusammen, das als Schnittpunkt der Stabrichtungen 1, 4 und 2, 5 gefunden werden kann. Die senkrechten Geschwindigkeiten von 4 und 5 müssen daher auf diesen beiden Stabrichtungen liegen. Die senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 5 bei der angenommenen Bewegung kennen wir aber bereits und wir brauchen daher nur die Parallele 5′, 4′ zu 5, 4 zu ziehen, um die senkrechte Geschwindigkeit 44′ auf der Richtungslinie des Stabes 1, 4 zu erhalten.

Dieselbe Betrachtung lässt sich endlich auch noch für den Stab 3, 4 wiederholen, dessen Endpunkte ebenfalls durch Stäbe mit 1 und 2 verbunden sind. Auch hier müssen die senkrechten Geschwindigkeiten beider Endpunkte auf den Richtungslinien der Verbindungsstäbe enthalten sein und da 4, 4′ bereits bekannt ist, erhalten wir die senkrechte Geschwindigkeit 3, 3′ des Punktes 3 durch Ziehen der Parallelen 4′, 3′ zu 4, 3.

Hiermit sind die zusammengehörigen Lagenänderungen aller beweglichen Knotenpunkte des Mechanismus genau bezeichnet und wir können dazu übergehen, die Spannung des im Mechanismus beseitigten Fachwerkstabes 3, 6 auf Grund des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten zu ermitteln.

Vorher sei indessen noch darauf hingewiesen, wie man bei diesem kinematischen Verfahren erkennt, ob ein Ausnahmefall vorliegt. Zu diesem Zwecke vergleicht man die Bewegungen der Knotenpunkte 3 und 6 mit einander, zwischen denen der vorher beseitigte Stab wieder eingesetzt werden soll. Wenn die durch die senkrechten Geschwindigkeiten $3, 3'$ und $6, 6'$ beschriebene Bewegung der beiden Knotenpunkte durch das Einsetzen des Stabes nicht gehindert wird, liegt der Ausnahmefall vor. Nun bedenke man, dass der Stab $3, 6$, falls er der bisher besprochenen unendlich kleinen Bewegung kein Hinderniss bereiten soll, sich dabei jedenfalls selbst um irgend einen Pol dreht und dass die senkrechten Geschwindigkeiten seiner beiden Endpunkte auf den von diesen nach dem Pole gezogenen Strahlen enthalten sein müssen. Der Pol könnte daher nur der Schnittpunkt der Richtungslinien von $3\,3'$ und $6\,6'$ sein. Zugleich müsste aber, wie wir schon zu Anfang des Paragraphen fanden, die Verbindungslinie $3', 6'$ parallel zur Stabrichtung $3, 6$ sein. Also nur dann, dann aber auch immer, wenn die Verbindungslinie $3', 6'$ parallel zu $3, 6$ ausfällt, kann die vorher besprochene unendlich kleine Bewegung des Mechanismus auch noch von dem Fachwerke, das man durch Einziehen des Stabes $3, 6$ erhält, ausgeführt werden, d. h. das Fachwerk ist nicht steif, sondern es liegt der Ausnahmefall vor.

Man kann diesem Schlusse auch noch eine andere, anschaulichere Deutung geben. Man vergleiche nämlich die Figur $1, 2, 3', 4', 5', 6'$ mit der Fachwerksfigur $1, 2, 3, 4, 5, 6$. In beiden laufen alle Seiten und Diagonalen in gleicher Richtung, mit Ausnahme der letzten Seiten $3, 6$ und $3', 6'$. Liegt aber der Ausnahmefall vor, so gehen auch diese in gleicher Richtung. Kann man also zu der gegebenen Grundfigur eine zweite Figur von gleicher Gliederung zeichnen, deren Seiten sämmtlich zu denen der Grundfigur parallel laufen, so liegt der Ausnahmefall vor. Das Fachwerk ist mit anderen Worten steif, wenn seine Gestalt durch die Angabe der Gliederung und der Richtungen aller Stäbe bestimmt ist. Diesen Gedanken hat Schur weiter ausgeführt, indem er es als die Hauptaufgabe der allgemeinen Theorie des ebenen statisch bestimmten Fachwerkes hinstellte, die Fachwerksfigur zu zeichnen, falls die Gliederung und die Stabrichtungen, sowie die Länge eines Stabes gegeben sind.

Um die Arbeiten zu berechnen, die von den äusseren Kräften $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ u. s. f. während der unendlich kleinen Bewegung des Mechanismus geleistet werden, könnte man alle Wege $3, 3'$ u. s. f. nachträglich wieder um einen rechten Winkel, entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne, zurückdrehen, um sie in ihre wahren Richtungen zu bringen. Einfacher gelangt man aber auf Grund der folgenden Ueberlegung zum Ziele. In Abb. 90 ist von Abb. 89 nur der Knotenpunkt 6 herausgezeichnet mit der an ihm angreifenden Last $\mathfrak{P}_6$ und der senkrechten Geschwindigkeit $6, 6'$. Zugleich ist $66'$ zurückgedreht nach $6, 6''$. Die Arbeit von $\mathfrak{P}_6$ ist gleich der Grösse von $\mathfrak{P}_6$ multiplicirt mit der Projektion von $6, 6''$ auf $\mathfrak{P}_6$. Projicirt man auch $6'$ auf $\mathfrak{P}_6$, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, das dem mit der Hypotenuse $6, 6''$ congruent ist. Die Länge des Projektionsstrahls von $6'$ auf $\mathfrak{P}_6$ ist daher gleich der Projektion des Weges $6, 6''$ auf $\mathfrak{P}_6$. Wir brauchen also $6, 6''$ gar nicht erst zu zeichnen, um die Arbeit von $\mathfrak{P}_6$ angeben zu können. Es genügt, $\mathfrak{P}_6$ mit der Länge des von $6'$ aus gezogenen Projektionsstrahls zu multipliciren. Dieses Produkt gibt aber das statische Moment der Kraft $\mathfrak{P}_6$ für den Momentenpunkt $6'$ an.

Abb. 90.

Ist die Arbeit von $\mathfrak{P}_6$ positiv, so ist auch das Moment positiv. Man erkennt dies zunächst aus Abb. 90. Es gilt aber auch für andere Lagen, wie man erkennt, wenn man sich $\mathfrak{P}_6$, das eine beliebige Richtung haben kann, in andere Lagen gedreht denkt. Wenn die Arbeit negativ oder Null wird, wird auch das Moment negativ oder Null und das Moment kann daher weiterhin an Stelle der Arbeit der Kraft gebraucht werden.

Durch diesen Tausch geht die Methode von Müller-Breslau in eine Momenten-Methode über, die sich auch als eine Verallgemeinerung der Ritter'schen Methode für die Berechnung der einfachen Fachwerke ansehen lässt, indem sie bei einfachen Fachwerken geradezu in diese übergeht. Man kann sie in der That auch anwenden und begründen, ohne auf die vorhergehenden kinematischen Betrachtungen, aus denen sie ursprünglich abgeleitet ist, irgendwie Bezug zu nehmen.

Nachdem der Linienzug $6', 5', 4', 3'$ wie vorher construirt ist, schreibt man nämlich für jeden dieser Punkte eine Momentengleichung an, die das Gleichgewicht der an dem zugehörigen Knotenpunkte 6, 5 u. s. f. angreifenden Last mit den Stabspannungen ausdrückt. Man kann dabei der Vollständigkeit wegen auch noch die Punkte 1′ und 2′, die mit 1 und 2 selbst zusammenfallen, als Momentenpunkte mit aufführen, obschon für diese die Momente der dazu gehörigen Kräfte sämmtlich verschwinden. Alle diese Momentengleichungen addirt man. In der Summe tritt das Moment jeder Stabspannung zweimal auf, z. B. das Moment von 5, 6 sowohl in Bezug auf 5′ als Moment der an 5 angreifenden Stabspannung, wie auch in Bezug auf 6′ für die Stabspannung an 6. Nach der Construction der Punkte 6′, 5′ u. s. f. sind aber die Hebelarme jedesmal gleich, mit Ausnahme jener, die zum Stabe 3, 6 gehören, während die Spannungen dem Wechselwirkungsgesetze zufolge an den beiden Endknotenpunkten entgegengesetzt gerichtet sind. In der Summe heben sich daher die Momente aller Stabspannungen mit jener einen Ausnahme gegen einander fort und man behält eine Gleichung, in der nur noch die Spannung des Stabes 3, 6 als Unbekannte auftritt.

Um diese Gleichung in bequemer Form anschreiben zu können, möge der aus der Zeichnung in Abb. 89 zu entnehmende Hebelarm der Last $\mathfrak{P}_n$ am Knotenpunkte n in Bezug auf n' mit p_n bezeichnet werden, wobei p_n positiv oder negativ zu rechnen ist, jenachdem das Moment von $\mathfrak{P}_n$ positiv oder negativ ist. Ferner sei die Spannung des Stabes 3, 6 mit S bezeichnet, wobei ein positiver Werth eine Zugspannung bedeutet. Der Hebelarm von S in Bezug auf 3′ sei s_3 und dies sei dem Vorzeichen nach in Uebereinstimmung mit dem Momente einer Zugspannung S am Knotenpunkte 3; ebenso bedeute s_6 den Hebelarm von S in Bezug auf 6′. Alle diese Hebelarme können nach Grösse und Vorzeichen aus der Abbildung entnommen werden.

Die Momentengleichung (oder, genauer gesagt, die aus der Summirung aller einzelnen Momentengleichungen gewonnene Gleichung) lautet dann

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$S(s_3 + s_6) + \Sigma Pp = 0,$$

woraus

$$S = -\frac{\Sigma Pp}{s_3 + s_6} \tag{39}$$

folgt. Hiermit ist die Aufgabe gelöst, denn nachdem eine Stabspannung bekannt ist, kann man die übrigen leicht durch Zeichnen des Kräfteplans ermitteln.

§ 37. Analytische Untersuchung des Ausnahmefalles.

Den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems lasse ich mit einem Knotenpunkte des Fachwerks zusammenfallen und die Richtung der X-Axe soll stets durch einen zweiten Knotenpunkt gehen. Wenn sich das Fachwerk bewegt, folgt ihm das Coordinatensystem, so dass die beiden genannten Bedingungen in jedem Augenblicke erfüllt sind. Ich denke mir sowohl die Knotenpunkte als auch die Stäbe mit je einer besonderen Nummerirung versehen. In Abb. 91 si vonnd dem ganzen Fachwerke nur zwei Knotenpunkte angegeben, die die Nummern i und k tragen, nebst dem zwischen ihnen verlaufenden Stabe g. Die übrigen Knotenpunkte und Stäbe möge man sich beliebig hinzudenken.

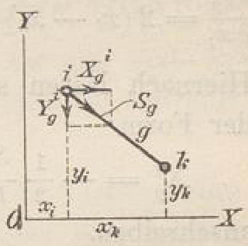

Abb. 91.

Die im Knotenpunkte i angreifende Last sei in zwei Componenten in den Richtungen der Coordinaten-Axen zerlegt, die ich mit X_0^i und Y_0^i bezeichne. Am Knotenpunkte i greifen ferner die Stabspannungen an, die man sich ebenfalls in rechtwinklige Componenten zerlegt denken kann. Die Spannung des Stabes g sei mit S_g, die Componenten der Spannung am Knotenpunkte i seien mit X_g^i und Y_g^i bezeichnet. Wenn man bedenkt, dass S_g positiv ist, wenn es eine Zugspannung bedeutet, erhält man aus Abb. 91

$$X_g^i = S_g \cdot \frac{x_k - x_i}{l_g} = -S_g \frac{x_i - x_k}{l_g}, \tag{40}$$