



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 33. Die Bildungsweisen des Fachwerks

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

§ 33. Die Bildungsweisen des Fachwerks.

Eine Bildungsweise des Fachwerks, nämlich jene, durch die alle einfachen Fachwerke gewonnen werden können, wurde schon in § 31 eingehend besprochen. Auch jedes nicht einfache Fachwerk, das nicht schon selbst eine Grundfigur bildet, kann aus seiner Grundfigur heraus auf dieselbe Weise, also durch Angliederung neuer Knotenpunkte durch je zwei Stäbe gewonnen werden. Hier handelt es sich nur noch um die Besprechung solcher Bildungsweisen, die zu den Grundfiguren selbst führen.

Eine zweite Bildungsweise, die sehr häufig vorkommt und daher eine genauere Besprechung erfordert, besteht in der Vereinigung von zwei geometrisch und statisch bestimmten Fachwerken zu einem einzigen durch drei Verbindungsstäbe. Auf die genauere Gestalt und Gliederung der beiden Fachwerke, die mit einander verbunden werden sollen, kommt es bei dieser Betrachtung nicht an. Es ist daher am besten, wenn man von ihr zunächst ganz absieht, also nur darauf achtet, dass beide Fachwerke jedenfalls unveränderliche Figuren bilden. Um dies auch in der Ausdruckweise hervorzuheben, bezeichnet man eine solche unveränderliche Figur als eine Scheibe und stellt sie in der Zeichnung durch einen willkürlich begrenzten Umriss dar, dessen Fläche zur Erhöhung der Uebersichtlichkeit zweckmässiger Weise durch eine Schraffirung ausgefüllt wird.

Zwei Stäbe genügen nicht, um zwei Scheiben fest mit einander zu verbinden. Die eine Scheibe kann sich dann immer noch relativ zur anderen, aber nur in ganz bestimmter Weise oder, wie man sagt, zwangläufig bewegen. Gehen beide Verbindungsstäbe von demselben Punkte der einen Scheibe aus, wie in Abb. 81, so besteht diese Bewegung in einer Drehung der einen Scheibe gegen die andere um diesen Punkt. Denkt man sich etwa die Scheibe I festgehalten, so kann sich II um den Knotenpunkt G, der durch die beiden Stäbe fest mit II verbunden

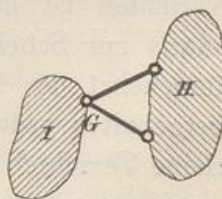


Abb. 81.

ist, drehen und jeder Punkt von II beschreibt dabei einen Kreis, dessen Mittelpunkt G ist. Man nennt dann den Knotenpunkt G ein Gelenk und sagt, dass beide Scheiben in diesem Gelenke mit einander zusammenhängen.

In Abb. 82 ist angenommen, dass die beiden Verbindungsstäbe nicht von einem gemeinsamen Knotenpunkte ausgehen. Denken wir uns auch jetzt wieder I festgehalten, so ist die Bewegung von II von verwickelterer Art, als im vorigen Falle. Es ist aber für unsere Zwecke nicht nöthig, diese Bewegung auf eine längere Strecke hin zu verfolgen, sondern es genügt, wenn wir sie nur bis zur nächsten, unendlich nahen (oder doch sehr nahen) Lage ins Auge fassen.

Schon aus Band I (§ 20, S. 118 der 2. Aufl.) ist bekannt, dass jede unendlich kleine Bewegung einer starren Figur in

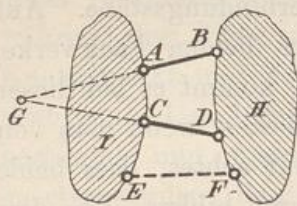


Abb. 82.

ihrer Ebene als Drehung um einen bestimmten Punkt, den Pol der Bewegung, aufgefasst werden kann. In diesem Punkte schneiden sich die Normalen aller Bahnelemente und man findet ihn daher schon als Schnittpunkt von zwei solchen Normalen. Nun kann sich Punkt B der

beweglichen Figur wegen des Verbindungsstabes AB nur auf einem Kreise bewegen, dessen Mittelpunkt A und dessen Halbmesser AB ist. Hiernach ist BA die Normale zu dem von B beschriebenen Bahnelemente und ebenso DC die Normale zum Bahnelemente des Punktes D . Der Schnittpunkt G beider Normalen ist daher der Pol der Bewegung der Scheibe II relativ zur Scheibe I oder auch, nach den gleichen Gründen, umgekehrt der Pol der Bewegung der Scheibe I gegen die festgehalten gedachte Scheibe II. Solange es nur auf unendlich kleine Verschiebungen ankommt, verhalten sich beide Scheiben genau so, als wenn sie im Punkte G durch ein Gelenk zusammenhängen. Wir wollen daher den Punkt G als ein imaginäres Gelenk zwischen I und II bezeichnen.

In einem Gelenke kann zwischen zwei Scheiben eine Kraft von beliebiger Richtung übertragen werden. Diese Kraft heisst

der Gelenkdruck. Gleichgewicht zwischen zwei Scheiben, die in einem Gelenke zusammenhängen, ist nur möglich, wenn die Resultirende der an einer (und dann auch der anderen) Scheibe angreifenden Lasten durch den Gelenkpunkt geht. Dies gilt nicht nur für die eigentlichen Gelenke, wie in Abb. 81, sondern auch für das imaginäre Gelenk G der Abb. 82. Zunächst können nämlich zwischen I und II in Abb. 82 nur zwei Stabspannungen längs der Richtungslinien AB und CD übertragen werden. Fasst man aber beide Kräfte zu einer Resultirenden zusammen, so geht diese durch den Schnittpunkt G der Richtungslinien. Sie kann daher als der im Gelenke G übertragene Gelenkdruck betrachtet werden. Kennt man diesen Gelenkdruck nach Grösse und Richtung, so folgen daraus auch umgekehrt die beiden Stabspannungen durch Zerlegen nach beiden Richtungslinien.

Durch Einschalten eines dritten Stabes zwischen beiden Scheiben kann man die bis dahin noch bestehende Beweglichkeit im Allgemeinen aufheben. Betrachtet man nämlich irgend zwei andere Punkte E und F der beiden Scheiben, so wird deren Entfernung bei einer Drehung von Scheibe II gegen I um das Gelenk G im Allgemeinen geändert. Sobald daher E und F durch einen dazwischen eingeschalteten Stab in unveränderlicher Entfernung gehalten werden, wird die vorher noch bestehende Bewegungsmöglichkeit dadurch aufgehoben. Nur dann, wenn die Richtungslinie des Stabes EF ebenfalls durch G geht, kann sich II immer noch relativ zu I wenigstens um einen unendlich kleinen Winkel drehen, denn F bewegt sich dabei senkrecht zu EF und hiermit ist nur eine von der zweiten Ordnung kleine Aenderung der Stablänge EF verbunden, der der Stab keinen ausreichenden Widerstand entgegenzusetzen vermag. Sobald freilich II eine Bewegung gegen I ausgeführt hat, die nicht mehr als unendlich klein angesehen werden kann, schneiden sich nachher die drei Stabrichtungen nicht mehr in demselben Punkte und die weitere Bewegung wird, wenn die Stäbe hinreichend widerstandsfähig sind, von da ab verhindert.

Im Falle der Abb. 81 würde ein dritter Stab, der ebenfalls von G aus nach irgend einem Punkte von Π geführt wäre, an der vorher bestehenden Bewegungsfreiheit überhaupt nichts ändern: es bliebe dann immer noch eine endliche Bewegungsfreiheit beider Scheiben bestehen. Im einen, wie im anderen Falle ist aber, da auch kleine Verschiebungen in der Regel nicht geduldet werden dürfen, der Ausnahmefall zu vermeiden, dass sich die Richtungen der drei Verbindungsstäbe in demselben Punkte treffen.

Zu demselben Schlusse gelangt man auch auf Grund der statischen Betrachtung. Die drei Stabspannungen müssen nämlich im Stande sein, bei beliebig gegebenen Lasten, die an dem ganzen Systeme den Gleichgewichtsbedingungen genügen, an jeder Scheibe mit den an dieser angreifenden Lasten Gleichgewicht herzustellen. Die Stabspannungen folgen demnach durch Zerlegen der Resultirenden dieser Lasten nach den Richtungslinien der drei Stäbe. Ein solche Zerlegung ist aber, wie schon im ersten Abschnitte gefunden wurde, nur möglich, wenn sich die drei Richtungslinien nicht in einem Punkte schneiden. Gehen sie nicht genau durch denselben Punkt, sondern bilden sie ein unendlich kleines Dreieck mit einander, so werden die Stabspannungen unendlich gross. Auch hier entsprechen daher der unendlich kleinen Verschieblichkeit statisch unendlich grosse Spannungen.

Immer wenn die Grundfigur eines Fachwerks durch Vereinigung von zwei Scheiben durch drei Verbindungsstäbe gebildet wird, kann man hiernach zunächst die Spannungen der Verbindungsstäbe auf ganz einfache Weise ermitteln. Am einfachsten wendet man die Ritter'sche Momentenmethode an, indem man, um z. B. die Spannung des Stabes EF in Abb. 82 zu berechnen, das aus den beiden anderen Stäben gebildete imaginäre Gelenk zum Momentenpunkte wählt. Die für das Gleichgewicht einer der beiden Scheiben angeschriebene Momentengleichung enthält dann die Stabspannung EF als einzige Unbekannte.

Nachdem die Spannungen der Verbindungsstäbe (oder auch

nur eines der Verbindungsstäbe) ermittelt sind, kann man gewöhnlich die in den Stäben der Scheiben auftretenden Spannungen ohne Weiteres durch Zeichnen eines Kräfteplans ermitteln. Hiervon wurde schon im ersten Abschnitte bei Berechnung des Polonceau-Binders Gebrauch gemacht.

Eine auf diese Art erhaltene und durch Anwendung der Momentenmethode (oder auch nach dem Culmann'schen Verfahren für die Zerlegung nach den drei gegebenen Richtungslinien) leicht zu berechnende Grundfigur zeigt auch Abb. 83. Sie ist aus der Vereinigung der beiden Dreiecke ABC und DEF durch die drei Verbindungsstäbe AE , BD und CF hervorgegangen. Ob eine Grundfigur überhaupt auf diese Art gebildet ist, kann man immer leicht entscheiden, indem man zusieht, ob sich ein Schnitt durch sie legen lässt, der nur drei Stäbe trifft, die nicht von demselben Punkte ausgehen. — Natürlich braucht übrigens die Verbindung von zwei Scheiben durch drei Stäbe nicht nothwendig zu einer Grundfigur zu führen. Sie kann auch ein einfaches Fachwerk ergeben und in der That lassen sich die gewöhnlich vorkommenden einfachen Fachwerke ebenfalls auf diese Art erzeugt denken.

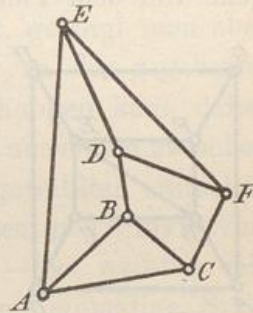


Abb. 83.

Ein Fachwerk kann ferner auch aus mehreren Scheiben mit Hilfe von Verbindungsstäben zusammengesetzt werden. Bezeichnet man die Anzahl der Scheiben mit s und die Anzahl der nicht zu ihnen gehörigen „freien“ Knotenpunkte, die etwa ebenfalls noch mit einbezogen werden sollen, mit n , so ist die Zahl m der erforderlichen Verbindungsstäbe

$$m = 2n + 3s - 3. \quad (34)$$

Um nämlich zunächst die zweite Scheibe an die erste anzuschliessen, braucht man drei Stäbe und ebensoviele für jede folgende Scheibe, zu diesem Zwecke also $3(s - 1)$. Dazu kommen dann noch für jeden „freien“ Knotenpunkt zwei Stäbe. Gl. (34) geht übrigens in Gl. (33) über, wenn man darin $s = 0$

setzt. — Die einfache Berechnung auf Grund der Ritter'schen Momentenmethode ist in diesem Falle im Allgemeinen nicht mehr möglich.

Ein weiterer Plan zum Aufbaue eines Fachwerks besteht darin, zuerst 4, 5 oder allgemein a Knotenpunkte durch a aufeinanderfolgende Stäbe zu einem geschlossenen Vielecke zu verbinden. An diese für sich nicht steife Figur schliesst man die übrigen Knotenpunkte durch je zwei Stäbe an und beseitigt schliesslich die noch vorhandene Beweglichkeit durch weitere $a - 3$ Stäbe, die zwischen passend ausgewählten Knotenpunkten eingeschaltet werden. Schon die in Abb. 83 gezeichnete Grundfigur kann in dieser Weise entstanden gedacht werden. Man gehe von dem Vierecke $BCFD$ aus, schliesse daran A und E

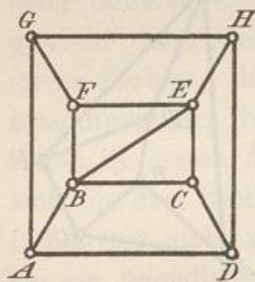


Abb. 84.

durch je zwei Stäbe und beseitige die noch zurückbleibende Verschieblichkeit durch den Stab AE . Eine andere, auf diese Art gebildete Grundfigur zeigt Abb. 84. Als Ausgangsfigur kann man etwa das Viereck $ABCD$ annehmen, an das der Reihe nach die Knotenpunkte E, F, G, H durch je zwei Stäbe angeschlossen werden, worauf die Steifigkeit durch Einziehen des letzten

Stabes DH hergestellt wird. Die Ritter'sche Momentenmethode führt hier nicht, oder jedenfalls nicht ohne Weiteres, zum Ziele.

Das allgemeinste Mittel, um alle möglichen Grundfiguren zu erhalten, besteht aber in der wiederholten Anwendung der schon in § 31 besprochenen Stabvertauschung. Um dies zu beweisen, betrachte man zunächst einen von jenen Knotenpunkten einer gegebenen Grundfigur, von denen (vgl. § 31) nur drei Stäbe ausgehen. Man beseitige einen der drei Stäbe; dann müssen auch die übrigen Knotenpunkte gegen einander verschieblich sein, denn wenn sie es nicht wären, würde auch der betrachtete Knotenpunkt durch die ihm verbliebenen beiden Stäbe fest an sie angeschlossen, was gegen die selbstverständliche Voraussetzung verstösst, dass die gegebene Grundfigur keine überzähligen Stäbe enthält. Die Verschieblichkeit kann

durch Einziehen eines neuen Stabes wieder aufgehoben werden. Nachdem diese Stabvertauschung vorgenommen ist, hat man einen Knotenpunkt, von dem nur zwei Stäbe ausgehen. Wird er beseitigt, so behält man eine Grundfigur übrig, die mindestens einen Knotenpunkt weniger umfasst. Mit dieser kann man nun auf dieselbe Weise verfahren u. s. f., bis schliesslich ein einfaches Fachwerk übrig bleibt. Dabei macht es auch nichts aus, wenn man die Knotenpunkte, von denen nur zwei Stäbe ausgingen, in Wirklichkeit gar nicht abtrennt, sondern sie so beibehält.

Hieraus folgt zunächst, dass man durch hinreichend oft fortgesetzte Stabvertauschungen jede Grundfigur auf ein einfaches Fachwerk zurückführen kann. Wenn man denselben Weg in umgekehrter Reihenfolge zurücklegt, gelangt man aber von dem einfachen Fachwerke auch wieder zu der gegebenen Grundfigur. Die Methode der Stabvertauschungen kann daher benutzt werden, um jede beliebige Grundfigur aus einem zwischen den gegebenen Knotenpunkten als Ausgang gewählten einfachen Fachwerke abzuleiten. — Bei den in der heutigen Praxis vorkommenden Grundfiguren genügt übrigens — so weit sie mir bekannt geworden sind — stets schon eine einmalige Stabvertauschung, um den Uebergang zu einem einfachen Fachwerke zu bewerkstelligen.

§ 34. Die Methode von Henneberg.

Ein allgemein anwendbares Verfahren zur Berechnung der Stabspannungen in beliebig gegliederten Grundfiguren bei gegebenen Lasten, ist im Anschlusse an die vorausgehenden Betrachtungen von Prof. Henneberg aufgestellt worden. Es gibt eine sich dem Gedächtnisse leicht einprägende Vorschrift, nach der die Stabspannungen stets mit verhältnissmässig geringer Mühe gefunden werden können und es ist daher für die praktische Anwendung wohl am meisten zu empfehlen.

Ich nehme zunächst an, dass die Grundfigur durch eine einmalige Stabvertauschung auf ein einfaches Fachwerk zurückgeführt werden kann. Man nimmt den Austausch vor und