Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Biegungsmomente für Schwungradwelle von Dampfmaschine (Aufg. 22)

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

40 mm oder 0,04 m vor. Beachtet man noch, dass der Dreiecksinhalt nur das halbe Produkt aus Grundlinie und Höhe angibt, so folgt, dass jeder qmm des Dreiecksinhaltes ein Moment von $2 \cdot 20 \cdot 0{,}04$ oder 1,6 mkg angibt. Anstatt dessen kann man auch für jedes Dreieck sofort den doppelten Inhalt berechnen (indem man die Division mit 2 weglässt) und hat dann hierfür 1 qmm = 0,8 mkg zu setzen. Die Ausmessung der doppelten Dreiecksflächen lieferte

$$M_x = 78{,}8 - 97{,}5 = -18{,}7 \text{ qmm} = -15{,}0 \text{ mkg}$$

$$M_y = 241 + 107 - 105 = +243 \text{ qmm} = +194{,}4 \text{ mkg}$$

$$M_z = 102{,}5 + 77 - 105 = +74{,}5 \text{ qmm} = +59{,}6 \text{ mkg.}$$

Als Maassstab für das Auftragen der Momentenvektoren wurde 1 mm = 4 mkg gewählt. Dabei musste M_x des negativen Vorzeichens wegen im Sinne der negativen X-Axe aufgetragen werden. Für die Grösse des resultirenden Momentes $\mathfrak{M}$ erhält man schliesslich (nach Ermittelung der wahren Länge) 204 mkg und für die Grösse der Resultirenden $\mathfrak{R}$ 148 kg.

22. *Aufgabe. Eine Welle (etwa die Schwungradwelle einer Dampfmaschine) ist in zwei Lagern A und B (Abb. 74) unterstützt und trägt Lasten (Gewicht, Riemenzug u. dgl.) die in drei verschiedenen Ebenen, I (vertikal), II (horizontal) und III (unter 30° gegen II geneigt) enthalten sind. Man soll das resultirende Biegungsmoment für verschiedene Querschnitte ermitteln.*

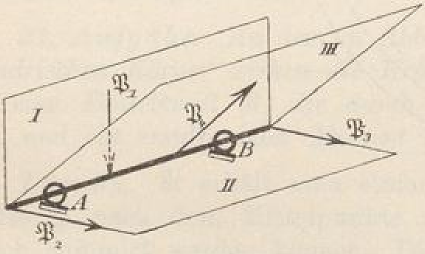

Abb. 74.

Lösung. Um das zur Berechnung auf Biegungsfestigkeit erforderliche Biegungsmoment für einen irgendwie belasteten Stab in Bezug auf einen bestimmten Querschnitt zu erhalten, denkt man sich alle Lasten auf der einen Seite, gewöhnlich links vom Querschnitte, zu einer durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehenden Resultirenden und einem resultirenden Momente zusammengefasst. Steht der Momentenvektor des resultirenden Momentes senkrecht zur Stabaxe, so gibt er unmittelbar das Biegungsmoment für den Querschnitt an. Im anderen Falle wird das Biegungsmoment durch die zur Stabaxe senkrecht stehende Componente des Momentenvektors angegeben, während die in die Richtung der Stabaxe fallende Componente das zu einer Beanspruchung auf Verdrehen führende Torsionsmoment angibt.

Wenn die Lasten, wie in Abb. 74, die Stabaxe sämmtlich schneiden, kommen übrigens überhaupt keine Torsionsmomente vor. Es mag indessen bemerkt werden, dass eine der Kräfte ursprünglich auch an einer auf der Welle aufgekeilten Kurbel oder sonstwie excentrisch angegriffen haben kann; dann ist sie aber in der durch ihren Angriffspunkt senkrecht zur Welle gezogenen Ebene parallel nach der Wellenaxe zu verlegen und in Abb. 74 ist angenommen, dass diese Verlegung bereits ausgeführt sei. Für das Biegungsmoment ist es nämlich ganz gleichgültig, ob die Last an einem Kurbelzapfen oder an dem ihm entsprechenden Punkte der Wellenaxe angreift, da die Parallelverlegung nach der Axe nur zu einem Torsionsmomente und nicht zu einer senkrecht zur Wellenaxe stehenden Componente des Momentenvektors führt.

Am einfachsten löst man die Aufgabe derart, dass man zunächst in jeder der drei Lastebenen die darin auftretenden Lasten, Auflagerkräfte und Biegungsmomente für sich untersucht und dann die zugehörigen Momentenvektoren geometrisch summirt. In jeder Lastebene kann man mit Hülfe eines Seilpolygons, dessen Horizontalzug man in allen Fällen gleichgross wählt, die Momentenfläche auftragen, wie es in Abb. 75 (S. 188) geschehen ist. Die Momentenflächen sind schraffirt und mit den Nummern I, II, III der Lastebenen bezeichnet, zu denen sie gehören.

Oben in Abb. 75 ist eine Gesammtansicht der Welle mit Einzeichnung der Kräfte $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$ $\mathfrak{P}_4$ gegeben, von denen sich freilich $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ als Punkte projiciren. Daneben steht eine Seitenansicht, in der sich $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ decken. Noch etwas weiter rechts sind in der Seitenansicht die Richtungen und Pfeile der Momentenvektoren $\mathfrak{M}_{I}$, $\mathfrak{M}_{II}$, $\mathfrak{M}_{III}$ angegeben, die zu den Biegungsmomenten in den Lastebenen I, II, III gehören.

Gerade diese Festsetzung der Pfeile erfordert eine sorgfältige Ueberlegung, zu der man sich am besten der axonometrischen Uebersichtsfigur in Abb. 74 behufs Erleichterung der Vorstellung bedient. Dabei denke man daran, dass es sich um das Biegungsmoment für einen Querschnitt zwischen den Lagern A und B handeln soll und dass man von den Kräften an jenem Theile der Welle bis zu dem betrachteten Querschnitte hin, der zum Lager A gehört, die Momente zu nehmen hat. In der Lastebene I wirkt die Kraft $\mathfrak{P}_1$ nach abwärts; der zugehörige Auflagerdruck in A geht nach oben und das Moment des Auflagerdruckes dreht nach rechts für einen vorn stehenden Beschauer. Nach dieser Seite ist daher $\mathfrak{M}_{I}$ rechtwinklig zur Ebene I abzutragen, wie es in der rechten oberen Ecke von Abb. 75 geschehen ist. — In der Lastebene II treten die beiden Lasten $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ ausserhalb der Stützpunkte auf; die zugehörigen Auflagerkräfte haben den entgegengesetzten Pfeil und wenn die Belastung symmetrisch ist ($\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_3$ und beide gleich gelegen), so sind auch die Auflagerkräfte gleich

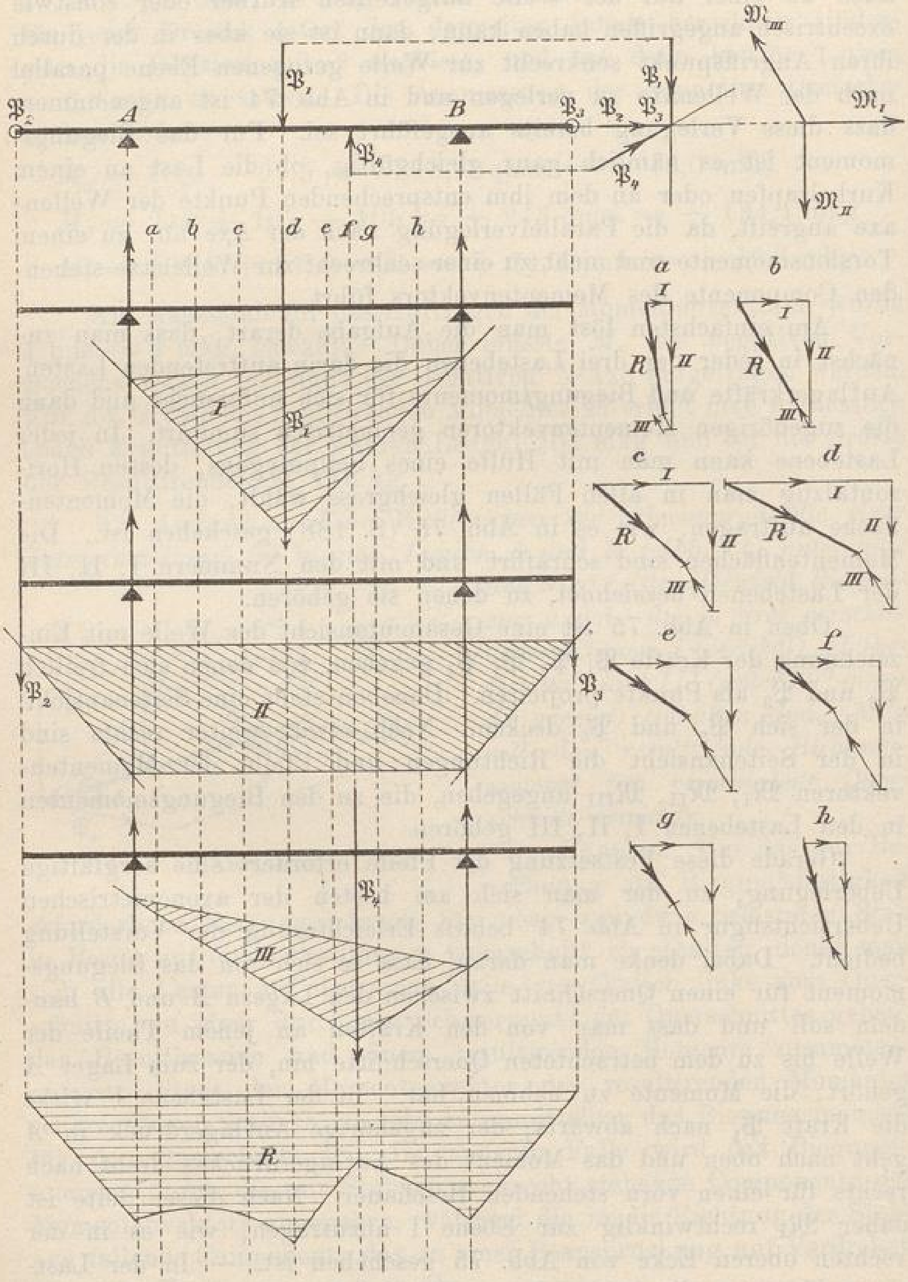

Abb. 75.

und ebenso gross wie eine der Lasten. Für einen zwischen A und B gelegenen Querschnitt hat man dann an dem nach A hin liegenden Theile der Welle ein Kräftepaar, das von oben her gesehen entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne dreht. Der Pfeil von $\mathfrak{M}_{II}$ ist daher nach abwärts einzutragen, wie es auch auf der bereits erwähnten kleinen Uebersichtsfigur geschehen ist. Auf dieselbe Weise findet man, dass der Pfeil von $\mathfrak{M}_{III}$ nach links oben zeigen muss.

Diese Bemerkungen bezogen sich auf die Richtungen der Momentenvektoren, während die Grössen für die verschiedenen, in der Abbildung mit a, b, c .... bezeichneten Querschnitte sofort aus den Momentenflächen I, II, III entnommen werden können. Da nämlich der Horizontalzug bei allen drei Seilpolygonen gleichgross gewählt wurde (die zu den Seilpolygonen gehörigen Kräftepläne wurden in der Abbildung fortgelassen), geben die auf den Vertikalen a, b u. s. f. durch die Momentenflächen gebildeten Abschnitte unmittelbar ein Maass für die Grössen der Biegungsmomente und daher auch für die zugehörigen Momentenvektoren ab.

Nach diesen Vorbereitungen kann man zur graphischen Summirung der Momentenvektoren schreiten. Die hierzu dienenden Polygone sind auf der rechten Seite der Abbildung untergebracht und einzeln mit den Buchstaben a bis h der Querschnitte bezeichnet, zu denen sie gehören. An Stelle von $\mathfrak{M}_I$ ist in den Polygonen kürzer I geschrieben u. s. f. Die Pfeile von I, II, III konnten unmittelbar aus der dafür vorher gegebenen Uebersichtsfigur, die Grössen mit dem Zirkel aus den Momentenflächen I, II, III übertragen werden. Die vierte Seite des Vierecks gibt jedesmal den resultirenden Momentenvektor an; in den Figuren ist R dazu geschrieben. Mit R kennt man zugleich das Biegungsmoment, das ermittelt werden sollte.

Hierbei ist noch darauf aufmerksam zu machen, dass die resultirenden Momentenvektoren für die einzelnen Querschnitte nicht nur in den Grössen, sondern auch der Richtung nach von einander abweichen. Denkt man sich jeden Momentenvektor im zugehörigen Punkte der Stabaxe angeheftet, so bildet ihre Aufeinanderfolge eine windschiefe Fläche.

Auf die Richtungen der Momentenvektoren, also auch auf die Richtung, nach der die Durchbiegung der Welle an einer bestimmten Stelle erfolgt, braucht man aber gewöhnlich nicht weiter zu achten. Bei kreisförmigem Querschnitte ist es für die Beanspruchung des Materials schon an sich gleichgültig, in welcher Richtung die Biegung erfolgt und überdies dreht sich die Welle, während die Kraftebenen fest liegen, so dass jeder Momentenvektor ohnehin der Reihe nach alle Richtungen relativ zum Querschnitte einnimmt.

Kümmert man sich hiernach nur um die absolute Grösse der Biegungsmomente, so kann man diese für alle untersuchten Querschnitte in einer besonderen Figur übersichtlich zusammenstellen, indem man von jedem Punkte der Wellenaxe aus eine Ordinate zieht, die gleich der Seite R im zugehörigen Momentenvektoren-Polygone gemacht wird. Am unteren Ende der Abbildung ist die dadurch erhaltene Momentenfläche durch Schraffirung hervorgehoben und mit dem Buchstaben R bezeichnet. Für jeden Querschnitt der Welle findet man daraus das zugehörige Biegungsmoment durch Multiplikation der Ordinate der Momentenfläche mit dem vorher für alle Seilpolygone übereinstimmend gewählten Horizontalzuge.

23. Aufgabe. Längs einer Geraden AB sind Kräfte in stetiger und der Grösse nach gleichförmiger Vertheilung rechtwinklig zu AB angebracht, so dass die graphische Darstellung der Kraftvertheilung (axonometrische Zeichnung in Abb. 76) einen Viertelumlauf einer Schraubenfläche ausmacht. Man soll die Kräfte zu einem Kraftkreuze zusammensetzen und die Centralaxe des von ihm gebildeten Kräftesystems aufsuchen.

Lösung. Im vorliegenden Falle kann man jede Kraft in zwei rechtwinklige Componenten zerlegen, die in den Ebenen BAC und BAD enthalten sind. In jeder dieser Ebenen sind alle Componenten parallel zu einander und sie lassen sich leicht zu einer Resultirenden vereinigen. Beide Resultirende bilden ein Kraftkreuz, das den gegebenen Kräften gleichwerthig ist.

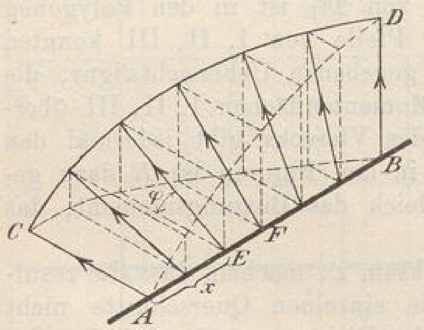

Abb. 76.

Bezeichnet man, um die Rechnung durchzuführen, AB mit l und den Abstand eines zwischen A und B liegenden Punktes E von A mit x, so ist der Winkel φ, den die Richtung der Kraft in diesem Punkte mit der horizontalen Richtung AC bildet

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l} \cdot$$

Wenn die der Grösse nach constante Belastungsintensität mit p bezeichnet wird, so dass also $p dx$ die am Längenelemente dx angreifende Kraft angibt, erhält man für deren Vertikalprojektion

$$p\,dx \sin\varphi \quad \text{oder} \quad p\,dx \sin\frac{\pi x}{2l} \cdot$$

Die Summe der Vertikalcomponenten V beträgt daher

$$V = p\int_0^l \sin\frac{\pi x}{2l}\,dx = p\,\frac{2l}{\pi}.$$

Der Abstand zwischen A und V, der mit v bezeichnet werden mag, ergibt sich aus der Momentengleichung

$$Vv = p\int_0^l x\sin\frac{\pi x}{2l}\,dx = p\left(\frac{2l}{\pi}\right)^2$$

und hiernach

$$v = \frac{2l}{\pi}.$$

Die Resultirende der Horizontal-Componenten H wird ebenso gross als V und hat den Abstand $\frac{2l}{\pi}$ vom anderen Endpunkte B. Hiermit ist das Kraftkreuz vollständig bekannt.

Verlegt man ferner, um das Kräftesystem auf eine Resultirende und ein resultirendes Moment zurückzuführen, die Kräfte H und V nach dem in der Mitte zwischen A und B liegenden Punkte F, so geben sie dort eine Resultirende, die mit der horizontalen Richtung von AC einen Winkel von 45^0 einschliesst und deren Grösse gleich $V\sqrt{2}$ oder

$$p\,\frac{2l}{\pi}\sqrt{2}$$

ist. Das bei der Parallelverlegung von V auftretende Moment hat die Grösse

$$V\left(\frac{2l}{\pi} - \frac{l}{2}\right) \quad \text{oder} \quad pl^2\,\frac{4-\pi}{\pi^2}$$

und der Momentenvektor ist gleich gerichtet und hat gleichen Pfeil mit AC. Ebenso gross und senkrecht nach oben gerichtet ist der Momentenvektor des bei der Parallelverlegung von H nach F auftretenden Kräftepaares. Der resultirende Momentenvektor schliesst daher mit der horizontalen Ebene BAC ebenfalls einen Winkel von 45^0 ein und hat die Grösse

$$pl^2\,\frac{4-\pi}{\pi^2}\sqrt{2}.$$

Da die Resultirende und der Vektor des resultirenden Momentes auf die gleiche unter 45^0 durch F gezogene, zu AB senkrechte Linie fallen, ist diese die Centralaxe des Kräftesystems. AB ist natürlich eine Nulllinie.

24. *Aufgabe. Eine dreieckige Tischplatte wird, wie Abb. 77 im Grundrisse und Aufrisse zeigt, durch sechs Beine gehalten, von denen je zwei, die von derselben Ecke der Platte ausgehen, in einer senkrechten Ebene liegen. Auf die Tischplatte wirkt eine beliebig gegebene Kraft $\mathfrak{P}$; man soll die dadurch in den Beinen hervorgebrachten Stabspannungen berechnen.*

Lösung. Man denke sich jede der sieben Kräfte ($\mathfrak{P}$ und die sechs Stabkräfte) in eine Componente zerlegt, die in der Ebene ε der Tischplatte liegt und in eine zweite, die rechtwinklig zu ε steht. Als Punkt A ist demnach hier der unendlich ferne Punkt einer zu ε gezogenen Normalen gewählt. Wegen der hier vorliegenden besonderen Anordnung fallen sowohl die vertikalen als die in der Ebene ε liegenden Componenten von je zwei zusammen gehörigen Beinen (1 und 2 oder 3 und 4 oder 5 und 6) auf dieselben Geraden. Man zerlege die ε-Componente von $\mathfrak{P}$ (die gleich der Strecke $\mathfrak{P}$ im Grundrisse ist) in bekannter Weise nach den drei Richtungslinien 1, 2; 3, 4 und 5, 6 und ebenso die Vertikal-Componente von $\mathfrak{P}$ nach den durch die drei Ecken der Platte gezogenen Vertikalen. Die letzte Zerlegung wird am einfachsten nach der schon im ersten Bande (in § 23, S. 160 der II. Auflage) gegebenen Anleitung ausgeführt.

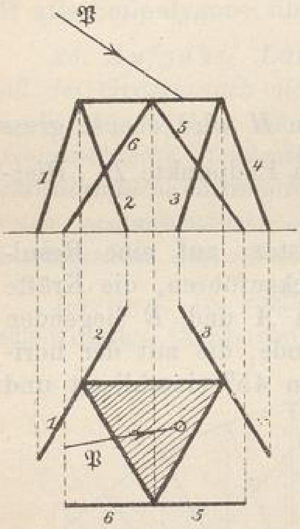

Abb. 77.

Nachdem dies geschehen ist, kennt man sowohl die vertikale als die horizontale Componente der Resultirenden von je zwei zusammen gehörigen Stabspannungen. Man braucht daher nur noch beide Componenten zu einer Resultirenden zu vereinigen und diese nach den beiden Stabrichtungen zu zerlegen (oder auch jede einzelne Componente nach den beiden Stabrichtungen zu zerlegen und die Spannungen zu summiren).

Anmerkung. Auch dann, wenn die durch je zwei zusammen gehörige Beine gelegten Ebenen nicht senkrecht stehen, sondern ganz beliebig geneigt sind, kann man das hier angewendete Verfahren, das schneller als das früher beschriebene, allgemein anwendbare zum Ziele führt, mit einer geringen Abänderung benutzen. Man suche den Schnittpunkt A der drei Ebenen auf und zerlege alle Kräfte in Componenten durch A und Componenten in ε. Auch dann fallen, worauf die Vereinfachung beruht, die Componenten der Spannungen von je zwei zusammengehörigen Beinen paarweise