Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 30. Praktische Anwendungen dieser Zerlegungsaufgabe

Richtungslinie als Fläche zweiter Ordnung in zwei Punkten getroffen wird. Durch jeden dieser Schnittpunkte geht ein Strahl der Regelschaar, der auch die drei anderen trifft. Schreibt man nun für jede der beiden Schnittgraden als Momentenaxen eine Momentengleichung an, so erhält man zwei Gleichungen, in denen die Grössen der beiden letzten Kräfte als Unbekannte vorkommen. Diese muss man nun freilich immer noch nach den Unbekannten auflösen; aber es ist klar, dass die Auflösung von zwei Gleichungen viel weniger Mühe macht, als die Auflösung von sechs bei dem früher besprochenen allgemeinsten Verfahren.

Die wirkliche Aufsuchung der beiden Graden, die man durch vier der gegebenen Richtungslinien zu legen vermag, kann freilich selbst so viel Schwierigkeiten machen, dass das Verfahren keinen Vortheil mehr bietet. Praktisch liegt aber die Sache bei solchen Fällen, wie sie in den Anwendungen vorkommen können, gewöhnlich viel einfacher: gewöhnlich kann man hier die beiden Schnittgraden ohne Weiteres angeben. Man nehme z. B. nur an, dass die sechs Richtungslinien wenigstens paarweise in einer Ebene liegen, also etwa 1 und 2 in einer Ebene und 3 und 4 in irgend einer anderen. Verbindet man dann den Schnittpunkt von 1 und 2 mit dem Schnittpunkte von 3 und 4, so hat man sofort eine der beiden gesuchten Graden. Die andere ergibt sich als Schnittlinie der Ebene 1, 2 mit der Ebene 3, 4.

§ 30. **Praktische Anwendungen dieser Zerlegungsaufgabe.**

Die wichtigste Anwendung, die von den vorausgehenden Untersuchungen gemacht werden kann, bezieht sich auf die Ermittelung der Spannungen von Stäben, durch die zwei starre Körper fest mit einander verbunden werden. Aus den Untersuchungen des ersten Bandes ist bereits bekannt, dass ein starrer Körper relativ zu einem zweiten, der als feststehend angenommen wird, wenn gar keine Fessel zwischen beiden besteht, sechs Freiheitsgrade der Bewegung besitzt. Daraus wurde schon damals geschlossen, dass man sechs Fesseln, von denen jede einen Freiheitsgrad der Bewegung aufhebt, anlegen müsse, um beide Körper in feste Verbindung mit einander zu bringen. Solche Fesseln sind im einfachsten Falle Stäbe, die zwischen geeignet ausgewählten Punkten beider Körper angebracht werden und die eine Entfernungsänderung zwischen ihren Endpunkten verhindern.

Wollte man Stäbe verwenden, die an den Endpunkten steif mit beiden Körpern verbunden wären, so dass sie sich nicht gegen diese zu drehen vermöchten und die auch zugleich widerstandsfähig genug gegen Verbiegen und Verdrehen construirt wären, so würde zwar offenbar schon ein einziger Stab ausreichen, um zwei starre Körper unveränderlich mit einander zu verbinden. Hier wird aber, wie schon in früheren Fällen, vorausgesetzt, dass die Verbindungsstäbe nur gegen Zug und Druck hinreichend widerstandsfähig sind und dass sie sich daher auch namentlich an den Befestigungsstellen leicht etwas gegen die mit ihnen verbundenen Körper zu drehen vermögen, so dass man dem wirklichen Verhalten ziemlich nahe kommt, wenn man annimmt, dass die Verbindung an diesen Stellen gelenkförmig (nach Art eines Kugelgelenkes) bewirkt sei. Dies entspricht auch der constructiven Praxis, in der man, wenigstens bei grösseren Ausführungen, Stabverbindungen immer so anzuordnen sucht, dass die Widerstandsfähigkeit der Stäbe gegen Zug und Druck schon vollständig ausreicht, um die Unverschieblichkeit des ganzen Verbandes zu sichern. In diesem Falle wird, wie schon früher nachgewiesen wurde, durch einen Stab nur ein Freiheitsgrad der Relativbewegung vernichtet und man braucht dann mindestens sechs Stäbe, um eine steife Verbindung zwischen beiden Körpern herzustellen. Diese Zahl reicht auch, wenn Ausnahmefälle vermieden werden, zur Erreichung des Zweckes im Allgemeinen aus.

Ergänzt wird diese, auf die Bewegungslehre des starren Körpers gestützte Ueberlegung durch die Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen. Wenn nämlich die Stäbe im Stande sein sollen, beide Körper wirksam gegen einander abzustützen, müssen die Spannungen, die sie zwischen beiden übertragen, ausreichen, um gegenüber allen Lasten, die an einem von ihnen beliebig angebracht werden können, Gleichgewicht herzustellen. Von diesen Spannungen sind die Richtungslinien, die mit den Stabmittellinien zusammenfallen, gegeben. Man muss daher jede beliebig an einem der beiden Körper angebrachte Last nach den Stabrichtungslinien so zerlegen können, dass die Stabspannungen in Verbindung mit der gewählten Last an dem betreffenden starren Körper ein Gleichgewichtssystem bilden. Wir sahen aber, dass sechs Richtungslinien gegeben sein müssen, wenn die Zerlegung in jedem Falle eindeutig ausführbar sein soll. In Uebereinstimmung mit dem früheren Ergebnisse folgt demnach auch aus der auf die Kräftezerlegung gestützten Betrachtung, dass sechs Stäbe zur Herstellung einer ausreichenden Abstützung zwischen beiden Körpern erforderlich sind. Zugleich können wir uns auch hinsichtlich der Ausnahmefälle, die bei der Anordnung der Stäbe vermieden werden müssen, auf die darüber im vorigen Paragraphen angestellten Auseinandersetzungen beziehen.

Sehr häufig ist einer der Körper, die durch die sechs Stäbe mit einander verbunden werden sollen, die feste Erde. Der zweite soll dann durch die Verbindungsstäbe vollständig festgehalten werden, so dass er gar keine Bewegungen gegen den irdischen Raum mehr auszuführen vermag. Man denke etwa, um ein ganz einfaches Beispiel zu haben, an eine Tischplatte. Schon ein einziges Tischbein genügt, um die Tischplatte unverrückbar festzuhalten, wenn es steif genug construirt und sowohl an der Tischplatte selbst als am Fussboden fest verschraubt wird, so dass jede Drehung an den Enden vermieden ist. Freilich ist diese Stützung, weil dabei die Biegungselasticität des Beines in Frage kommt, weniger zuverlässig, falls auch kleinere Bewegungen der Platte störend empfunden werden. Wollte man das Bein nur einfach unten aufstellen, ohne es zu verschrauben, so könnte der Tisch umfallen, weil nun eine Drehung um den Fuss möglich wäre. Versieht man eine Tischplatte mit drei nicht in einer Ebene liegenden Beinen, die gegen die Platte starr verbunden sind, so ist eine Abstützung der unteren Enden gegen Drehung nicht mehr nöthig. Es genügt wenn nur dafür gesorgt wird, dass die unteren Enden sich in der Ebene des Fussbodens nicht zu verschieben und sich auch nicht von ihr abzuheben vermögen.

Bei einem solchen dreibeinigen Tische werden aber, wenn er wirklich durch Festhalten der unteren Enden unverschieblich aufgestellt ist, die Beine auf Biegung in Anspruch genommen, wenigstens immer dann, wenn an der Tischplatte horizontale Lasten oder Lasten mit horizontalen Componenten angreifen. Der Biegungselasticität der Beine entspricht zugleich die Möglichkeit von Verschiebungen der Tischplatte von derselben Grössenordnung, sobald horizontale Lasten auftreten. Die sicherste Aufstellung der Tischplatte erhält man erst durch Anbringung von sechs Beinen, die nur gegen Zug und Druck zu widerstehen brauchen. Da die elastischen Längenänderungen bei Zug- oder Druckbelastung im Allgemeinen viel kleiner sind, als die Biegungspfeile bei einer Inanspruchnahme auf Biegung, wird die Tischplatte bei einer passend angeordneten Stützung durch sechs Beine viel sicherer und unverrückbarer aufgestellt, als im vorigen Falle.

Natürlich müssen bei der Anordnung der Beine auch hier wieder die Ausnahmefälle vermieden werden. Es dürfen also z. B. nicht alle Beine parallel zu einander sein; vielmehr dürfen, wie wir schon früher fanden, nur höchstens drei der sechs Stabrichtungslinien parallel zu einander (oder von einem Punkte aus) gehen. Dagegen dürfen die Beine nun nicht nur am Fussboden, sondern auch an der Tischplatte frei (etwa um Kugelgelenke) drehbar befestigt sein.

Die möglichst unverschiebliche Aufstellung einer Tischplatte ist z. B. bei geodätischen Instrumenten, etwa bei einem Messtische, erwünscht. Betrachtet man das Messtischgestell, so sieht man auf den ersten Blick freilich nur drei Beine. Jedes von diesen ist gegen die Tischplatte um ein Gelenk, jedoch nicht um ein Kugelgelenk, sondern um ein cylindrisches Gelenk drehbar befestigt. Hierbei treten immer noch Biegungsbeanspruchungen der Beine in Folge von horizontalen Lasten an der Tischplatte auf. Thatsächlich wird aber, um diese, bezw. die ihnen entsprechenden Biegungspfeile zu vermeiden oder zu vermindern, jedes Bein nach oben hin verbreitert. Bei vollständiger constructiver Durchbildung in diesem Sinne wird schliesslich jedes der drei Beine in zwei Stäbe aufgelöst, die unten zusammenstossen, während sie nach oben auseinandergehen und an den beiden Enden des dann verhältnissmässig langen, gemeinsamen Gelenkbolzens befestigt sind.

In solchen Fällen sieht man oft schon sehr deutlich das Bestreben des Constructeurs eine Stützung durch sechs Stäbe herbeizuführen. Freilich sind die Lasten, die in horizontaler Richtung an der Tischplatte eines geodätischen Instrumentes vorkommen, so gering, dass die Stützung durch sechs Stäbe, die blos auf Zug oder Druck in Anspruch genommen werden, immerhin keine so wichtige Rolle spielt, als in anderen Fällen. Man nehme etwa an, dass eine grössere Platte, auf der eine Maschine aufgestellt werden soll, oder die von Menschen begangen werden soll, in einer Höhe von einigen Metern über dem Fussboden mit den einfachsten und dabei wirksamsten Mitteln abgestützt werden soll. Dann wird man immer sechs Stäbe als Beine zu verwenden haben, wenn nicht etwa in Folge einer grossen horizontalen Ausdehnung der Platte die Zahl noch erhöht werden muss, um die Platte durch eine Unterstützung in mehr Punkten selbst widerstandsfähiger gegen eigene Formänderungen zu machen, die sie etwa unter den Lasten erleiden könnte. Fällt aber ein solcher Grund weg, ist also die Platte hinreichend widerstandsfähig, um sie genau genug als starren Körper betrachten zu können, so wird man stets am besten thun, sich mit der nothwendigen Anzahl von sechs Stäben zu ihrer Stützung zu begnügen.

Ein solcher Fall wird z. B. durch Abb. 70 in axonometrischer Zeichnung zur Darstellung gebracht. Von den sechs Stäben laufen, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, je zwei in einem Punkte zusammen, hier die Stäbe 1 und 2 in einem Punkte der Tischplatte, und 3 und 4 bezw. 5 und 6 in je einem Punkte des Fussbodens. An der Tischplatte möge irgend eine beliebig gerichtete Last $\mathfrak{P}$ angreifen; man soll die dadurch in den sechs Beinen hervorgebrachten Stabspannungen ermitteln.

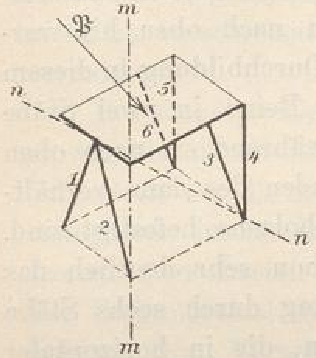

Abb. 70.

Man sucht zunächst eine Momentenaxe auf, die durch mindestens vier Stäbe, etwa durch 1, 2, 3, 4 geht. Eine solche erhalten wir durch Aufsuchen der Schnittlinie der Ebenen 1, 2 und 3, 4. Das ist die in der Abbildung mit mm bezeichnete Gerade; sie steht hier lothrecht, weil beide Ebenen 1, 2 und 3, 4 lothrecht vorausgesetzt waren. Zugleich erlangt man hier noch von selbst den weiteren Vortheil, dass mm auch noch die Richtungslinie 5 schneidet. Sie ist nämlich parallel zu ihr, da Stab 5 lothrecht steht, und dies entspricht einem Schnitte, denn dass dieser erst im Unendlichen erfolgt, bleibt für unseren Zweck gleichgültig.

Die Spannung des Stabes 6 kann demnach sofort aus einer einzigen, für die Axe mm aufgestellten Momentengleichung berechnet werden. Hierbei erinnern wir uns, dass man die Momente in Bezug auf Axen immer am einfachsten erhält, wenn man die Kräfte auf eine zur Axe senkrecht stehende Ebene projicirt und die Momente in dieser Ebene von den Kräfteprojektionen in Bezug auf den Punkt nimmt, in dem die Axe die Projektionsebene trifft. Das wäre also hier die Grundriss-Ebene. In einem praktisch vorliegenden Falle wird man ohnehin schon eine Grundrisszeichnung des Tisches und der an ihm angreifenden Lasten besitzen. Die axonometrische Zeichnung dient nur als Uebersichtszeichnung, die nicht im Maassstabe aufgetragen zu werden braucht, sondern blos freihändig entworfen wird. — Für den Fusspunkt des Stabes 2 schreibt man also im Grundrisse die Bedingung an, dass das Moment der Projektion von $\mathfrak{P}$ gleich dem Momente der Projektion der Stabspannung 6 sein muss. Daraus findet man sofort die Projektion der Stabspannung 6 und hieraus auch, da die Richtungslinie des Stabes bekannt ist, (unter Zuhülfenahme des Aufrisses) die Stabspannung 6 selbst. Man sieht auch leicht schon aus der axonometrischen Zeichnung, dass Stab 6 durch die angegebene Last $\mathfrak{P}$ in Druckspannung versetzt wird.

Hätte sich *mm* nicht zufällig auch mit der Richtungslinie des Stabes 5 geschnitten, so wären in der Momentengleichung zwei unbekannte Stabspannungen vorgekommen. In diesem Falle hätte man noch die zweite Gerade aufsuchen müssen, die durch die Stäbe 1, 2, 3, 4 gelegt werden kann. Dies ist die Gerade *nn*, die den oberen Endpunkt von 1 und 2 mit dem unteren Endpunkte von 3 und 4 verbindet. Dann wird das Verfahren freilich umständlicher, da man nun $\mathfrak{P}$, 5 und 6 auf eine zu *nn* senkrechte Ebene zu projiciren und in dieser (nach Umklappen) die Momentengleichung aufzustellen hat. — Wir wollen indessen jetzt bei dem einfacheren Beispiele bleiben.

Gerade so wie 6 kann man natürlich auch die Stabspannung 3 ermitteln, indem man die Schnittlinie der Ebenen 1, 2 und 5, 6 als Momentenaxe wählt. Auch dies erfordert nur das Anschreiben einer einfachen Momentengleichung im Grundrisse.

Hierauf gehe man zur Ermittelung der Stabspannungen 1 und 2 über. In diesem Falle vermag man keine Momentenaxe zu ziehen, die ausser den vier übrigen Stäben auch noch einen von jenen beiden schnitte. Man muss daher zwei Momentengleichungen anschreiben und sie nach den Unbekannten 1 und 2 auflösen. Diese Lösung gestaltet sich indessen hier ganz einfach.

Eine der beiden Momentenaxen, die durch die Stabrichtungslinien 3, 4, 5, 6 geht, ist die Verbindungslinie der Fusspunkte dieser vier Stäbe. Diese Axe liegt in der Grundrissebene und projicirt sich in einem rechtwinklig zur Axe gezeichneten Aufrisse als Punkt. In diesem Aufrisse decken sich ferner die Projektionen von 1 und 2. Man findet daher aus einer einfachen Momentengleichung im Aufrisse sofort die Summe der Vertikal-Componenten von 1 und 2.

Die andere durch die Linien 3, 4, 5, 6 gehende Momentenaxe ist die unendlich ferne Schnittlinie der beiden durch 3 und 4 und durch 5 und 6 gelegten parallelen Ebenen. Immer wenn man auf eine Momentengleichung für eine unendlich ferne Axe geführt wird, hat man zu beachten, dass eine solche gleichwerthig mit einer Componentengleichung ist, die für die wirkliche Ausrechnung an ihre Stelle tritt. Die Lage einer unendlich fernen Axe wird nämlich als Schnitt eines Büschels paralleler Ebenen definirt. Ferner kommt es bei dem Momente in Bezug auf eine Axe nur auf jene Componente der Kraft an, die im Angriffspunkte der Kraft rechtwinklig zu der von der Axe aus durch den Angriffspunkt gelegten Ebene steht. Alle diese Componenten gehen aber bei unendlich ferner Lage der Axe in derselben Richtung und da ferner alle Hebelarme, weil sie sich nur um endliche Beträge von einander unterscheiden, als gleichgross anzusehen sind, so vereinfacht sich die Momentengleichung in der That zu der Bedingung, dass die algebraische Summe der in der Richtung senkrecht zu jenem Ebenenbüschel genommenen Componenten aller Kräfte gleich Null sein muss.

In unserem Falle erhalten wir also eine Gleichung, die ausdrückt, dass die algebraische Summe aus den Horizontal-Componenten von 1 und 2 und der parallel zur Verbindungslinie der Fusspunkte von 1 und 2 genommenen Componente von $\mathfrak{P}$ gleich Null sein muss. Diese Gleichung in Verbindung mit der vorher schon gefundenen Momentengleichung gestattet sofort die Auflösung nach den beiden unbekannten Stabspannungen 1 und 2.

Nimmt man z. B. an, dass die Last $\mathfrak{P}$ lothrecht gerichtet sei, so lehrt die Componenten-Gleichung, dass die Horizontalprojektionen der Spannungen 1 und 2 gleichgross sind und mit entgegengesetztem Pfeile an der Tischplatte angreifen. Daraus folgt zugleich, dass auch beide Stabspannungen gleichgross und von gleichem Vorzeichen sind. Dies gilt dann auch von den Vertikal-Componenten und aus der Momentengleichung in der Aufriss-Ebene, die die Summe beider Vertikal-Componenten kennen lehrte, erhalten wir durch Halbiren des gefundenen Werthes auch die Grösse einer Componenten und hiermit die Grösse der Stabspannungen.

Wäre dagegen etwa 𝔓 horizontal und zwar parallel zur Verbindungslinie der Fusspunkte von 1 und 2 gerichtet, so würde man zuerst aus der Momentengleichung in der Aufriss-Ebene schliessen, dass die Summe der Vertikal-Componenten von 1 und 2 Null sein muss, d. h. dass beide Stäbe Spannungen von gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen haben müssen. Aus der Componenten-Gleichung würde dagegen folgen, dass beide im gleichen Sinne an der Tischplatte angreifenden Horizontal-Componenten zusammen gleich der horizontalen Belastung 𝔓 sein müssen, so dass auf jede von ihnen die Hälfte davon entfällt. Die Stabspannungen 1 und 2 sind hiermit bekannt.

Bei der zur vorigen rechtwinkligen Lage einer Horizontalbelastung 𝔓 folgt — und zwar diesmal aus der Componenten-Gleichung —, dass die Stabspannungen gleichgross und von gleichem Vorzeichen sind, während die Momenten-Gleichung die absoluten Beträge kennen lehrt. — Aber auch bei beliebiger Richtung von 𝔓 macht die Auflösung der Componenten- und der Momenten-Gleichung nach den beiden Unbekannten niemals Schwierigkeiten.

Nachdem man von einigen Stäben die Spannungen bereits ermittelt hat, kann die der noch übrigen (also hier die von 4 und 5) viel einfacher berechnet werden. Man braucht nämlich jetzt nicht mehr zu scheuen, dass in einer neu aufzustellenden Momentengleichung zugleich die Momente der anderen Stabspannungen auftreten, weil man von diesen die Werthe schon kennt. Projicirt man also den Tisch auf eine zu den Richtungen von 4 und 5 parallele Ebene, so kommen in dieser nur zwei unbekannte Kräfteprojektionen vor und indem man etwa den Momentenpunkt auf die Richtung von 4 legt, erhält man aus der Momentengleichung sofort die darin allein noch unbekannte Spannung des Stabes 5.

Schliesslich möge noch darauf hingewiesen werden, dass man die Lösung der Aufgabe zuweilen erheblich abkürzen kann, wenn man eine Projektion anzugeben vermag, in der sich je zwei Stäbe decken, so dass in ihr nur noch drei von einander verschiedene Stabrichtungen auftreten. Auch dies ist bei dem zur Erläuterung gewählten Beispiele der Abb. 70 möglich. In dem vorher schon erwähnten Aufrisse auf eine zur Verbindungslinie der Fusspunkte von 1 und 2 senkrechte Ebene decken sich die Projektionen von 1 und 2, von 4 und 5 und von 3 und 6. Da nun die Kräfteprojektionen in ihrer Ebene für sich ein Gleichgewichtssystem bilden müssen, so kann man die Projektion von $\mathfrak{P}$ ohne Weiteres in der Aufriss-Ebene nach jenen drei Richtungslinien zerlegen. Damit erhält man freilich die Stabspannungen noch nicht einzeln, sondern nur die Summe aus je zwei Projektionen von Stabkräften. Jedenfalls ist man aber damit sofort im Besitze von drei Gleichungen zwischen je zwei der sechs Unbekannten, die in Verbindung mit den übrigen Gleichgewichtsbedingungen zur Lösung benutzt werden können.

Aufgaben.

20. *Aufgabe. Auf einer in zwei Punkten A und B unterstützten Welle (Abb. 71) sind zwei Arme aufgesteckt, von denen einer horizontal, der andere vertikal gerichtet ist. Am horizontalen Arme wirkt die vertikale Kraft $\mathfrak{P}$ und am vertikalen Arme die horizontale Kraft $\mathfrak{Q}$. Man soll das aus beiden Kräften gebildete Kraftkreuz durch ein anderes ersetzen, von dem eine Kraft durch A geht, während die zweite in der durch B senkrecht zur Welle gezogenen Ebene liegt. Unter welchen Umständen wird ferner die Wellenmittellinie AB zu einer Nulllinie?*

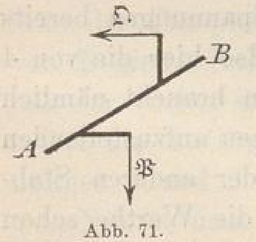

Abb. 71.

Lösung. In Abb. 72 ist die Welle in drei Rissen gezeichnet; der dritte Riss, in dem sich AB als Punkt projicirt, liegt in der durch B senkrecht zur Welle gezogenen Ebene, die wir weiterhin als die Ebene ε bezeichnen wollen. Zunächst wird von A aus durch die Richtungslinie der Kraft $\mathfrak{P}$ eine Ebene gelegt und deren Spur in der Ebene ε aufgesucht. Da $\mathfrak{P}$ parallel zu ε ist, haben wir es in zwei parallele Componenten $\mathfrak{P}_A$ und $\mathfrak{P}_\varepsilon$ zu zerlegen, von