Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 28. Die Coordinaten eines Kräftesystems nach der analytischen Darstellung

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

§ 28. Die Coordinaten eines Kräftesystems nach der analytischen Darstellung.

Um die Zusammensetzung der Kräfte im Raume nach den Methoden der analytischen Geometrie behandeln zu können, denkt man sich alle gegebenen Kräfte in Componenten nach den Richtungen der drei rechtwinklig aufeinander stehenden Coordinatenaxen XYZ zerlegt. Auch die Momentenvektoren der Kräftepaare zerlegt man in ihre Componenten nach diesen Richtungen, d. h. man schreibt an Stelle der auf Momentenpunkte bezogenen Momente die Momente in Bezug auf Axen an, die den Coordinatenaxen parallel gehen.

Am bequemsten ist auch hier für die Rechnung der Ersatz des gegebenen Kräftesystems durch eine Resultirende in Verbindung mit einem resultirenden Kräftepaare. Den Punkt A, durch den die Resultirende geführt werden soll, lässt man am besten mit dem Coordinatenursprunge zusammenfallen. Die Componenten des resultirenden Momentes $\mathfrak{M}$ sind dann gleich den Momentensummen der gegebenen Kräfte in Bezug auf die Coordinatenaxen als Momentenaxen.

Die Coordinaten des Angriffspunktes einer der gegebenen Kräfte, $\mathfrak{P}_1$ seien mit $x_1 y_1 z_1$ und die Componenten der Kraft in den Richtungen der Coordinatenaxen mit $X_1\, Y_1\, Z_1$ bezeichnet und ähnlich für die übrigen. Dann erhält man zunächst für die Componenten XYZ der Resultirenden $\mathfrak{R}$ die Gleichungen

$$X = X_1 + X_2 + \cdots = \Sigma X; \quad Y = \Sigma Y; \quad Z = \Sigma Z \qquad (31)$$

wenn auf der rechten Seite X unter dem Summenzeichen irgend eine der Componenten X_1, X_2 u. s. f. bedeutet.

Die Componenten des auf den Ursprung als Momentenpunkt bezogenen resultirenden Moments $\mathfrak{M}$ seien mit LMN bezeichnet. Man kann sie nach den schon im ersten Bande dafür gegebenen Vorschriften unmittelbar berechnen. Zur besseren Uebersicht seien indessen die dafür gültigen Ausdrücke an der Hand von Abb. 69 noch einmal abgeleitet. In der Abbildung ist der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{P}_1$ in drei Rissen gezeichnet und in diese Risse sind auch die Componenten $X_1 Y_1 Z_1$ von $\mathfrak{P}_1$ in jenen Richtungen eingetragen, in denen sie positiv gerechnet werden. Um das Moment der Kraft $\mathfrak{P}_1$ in Bezug auf die X-Axe zu erhalten, betrachten wir ihre Projektion auf die YZ-Ebene und nehmen in dieser Ebene das Moment für den Ursprung O als Momentenpunkt. Anstatt von der Projektion von $\mathfrak{P}_1$ selbst das Moment zu berechnen, können wir indessen auch die Summe der Momente von Y_1 und Z_1 dafür setzen, da die Resultirende aus diesen beiden die Projektion von $\mathfrak{P}_1$ auf die YZ-Ebene liefert. Als positiv sind dabei jene Momente in Ansatz zu bringen, die für den vorn, d. h. auf der Seite der positiven X-Axe stehenden Beschauer im Uhrzeigersinne drehen. Hiernach findet man für das Moment von $\mathfrak{P}_1$ in Bezug auf die X-Axe

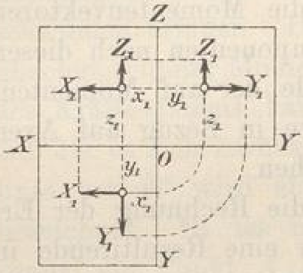

Abb. 69.

$$Y_1 z_1 - Z_1 y_1.$$

Aehnliche Ausdrücke gelten für die übrigen Kräfte $\mathfrak{P}$ und in Bezug auf die beiden anderen Coordinatenaxen als Momentenaxen. Im Ganzen erhält man daher

$$\left.\begin{aligned} L &= \Sigma(Yz - Zy); \\ M &= \Sigma(Zx - Xz); \\ N &= \Sigma(Xy - Yx). \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Die aus den Gleichungen (31) hervorgehenden Componenten XYZ von $\mathfrak{R}$ und die jetzt berechneten Componenten LMN von $\mathfrak{M}$ fasst man unter der Bezeichnung der sechs Coordinaten des gegebenen Kräftesystems zusammen. Diese sechs Grössen genügen nämlich, um ein Kräftesystem hinreichend zu beschreiben, insofern als zwei Kräftesysteme, die in den sechs Coordinaten übereinstimmen, wenn sie auch im Einzelnen anders zusammengesetzt sein mögen, doch im Ganzen gleichwerthig mit einander sind. Bei Aufgaben über das Gleichgewicht oder die Bewegung eines starren Körpers braucht man daher von den äusseren Kräften nichts, als jene sechs Coordinaten zu kennen.

Im Gleichgewichte kann ein Kräftesystem nur dann stehen, wenn alle sechs Coordinaten zu Null werden. Setzt man die Summengrössen auf den rechten Seiten der Gleichungen (31) und (32) gleich Null, so erhält man demnach die nothwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen für ein beliebiges Kräftesystem. — Bemerkenswerth ist, dass die Zahl dieser Gleichgewichtsbedingungen sechs beträgt; sie entspricht der Zahl der Freiheitsgrade für die Bewegung eines starren Körpers. Ueberhaupt besteht zwischen den Untersuchungen über die Kräftezusammensetzung im Raume und den im ersten Bande durchgeführten Betrachtungen über die Bewegung eines starren Körpers eine enge Verwandtschaft. So wie wir hier ein Kräftesystem auf eine Resultirende $\mathfrak{R}$ und ein resultirendes Moment $\mathfrak{M}$ zurückführten, wurde dort die beliebige Bewegung eines starren Körpers in die Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ irgend eines Anfangspunktes und die Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ um eine durch diesen Anfangspunkt gehende Axe zerlegt. Der Darstellung der Bewegung als eine schraubenförmige (bei gleicher Richtung von $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$) entspricht hier die Construction der Centralaxe des Kräftesystems u. s. f. — Man kann den Vergleich noch erheblich weiter führen, worauf aber hier verzichtet werden darf.

§ 29. Zerlegung einer Kraft nach sechs gegebenen Richtungslinien.

Eine Kraft kann in einer Ebene nach zwei sich mit ihrer Richtungslinie im selben Punkte schneidenden Graden zerlegt werden. Im Raume ist eine Zerlegung nach 3 gegebenen Graden möglich, die mit der Kraft durch denselben Punkt gehen. In der Ebene kann man eine Kraft ebenfalls nach drei Richtungslinien zerlegen, wenn sich diese Linien mit der Kraft nicht in demselben Punkte schneiden. Alle diese Aufgaben wurden im ersten Abschnitte behandelt und es zeigte