



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 26. Das Kraftkreuz-Tetraeder

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

Regelschaar enthalten sein. Fünf windschiefe Kräfte können daher jedenfalls nur dann im Gleichgewichte miteinander sein, wenn man mindestens zwei grade Linien ziehen kann, die alle fünf Richtungslinien schneiden.

§ 26. Das Kraftkreuz-Tetraeder.

Irgend ein Kraftkreuz sei gegeben, dessen Kräfte \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 durch Strecken auf beiden Wirkungslinien zur Darstellung gebracht sind. Man denke sich die vier Endpunkte dieser Strecken durch vier Verbindungsstrecken miteinander verbunden. Hierdurch wird ein Tetraeder gebildet, in dem \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 zwei einander gegenüber liegende Kanten darstellen. Man kann zeigen, dass für alle unter einander gleichwerthigen Kraftkreuze die in dieser Weise construirten Tetraeder gleichen Inhalt haben.

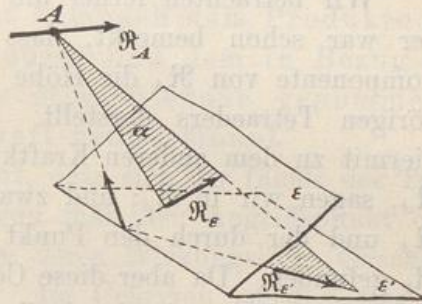


Abb. 64.

Den Beweis führt man am einfachsten auf Grund der in § 23 im Anschlusse an die hier wieder abgedruckte Abb. 64 durchgeführten Betrachtung. Es zeigte sich dort, dass die zweite Kraft des Kraftkreuzes \mathfrak{R}_e oder $\mathfrak{R}_{e'}$ in einer Ebene α enthalten sein muss, wenn die erste Kraft \mathfrak{R}_A durch einen beliebig gewählten Punkt A gehen soll. Dabei ist α die Nullebene des Punktes A . Verbindet man in Abb. 64 den Punkt A , der als Anfangspunkt der Strecke \mathfrak{R}_A gewählt sein möge, mit den Endpunkten der Strecke, durch die \mathfrak{R}_e oder $\mathfrak{R}_{e'}$ dargestellt wird, so erhält man eines der vier Dreiecke, die die Seitenflächen des zugehörigen Kraftkreuz-Tetraeders ausmachen. Wir wollen dieses in der Ebene α liegende Dreieck als die Basis des Tetraeders betrachten; die zugehörige Höhe wird dann durch die Projektion der von A aus abgetragenen Strecke \mathfrak{R}_A auf eine zur Ebene α errichtete Normale dargestellt.

Nun stellt die Basisfläche des Tetraeders oder das Drei-

eck $A\mathfrak{R}_\varepsilon$ zugleich das Momentendreieck der Kraft \mathfrak{R}_ε für den Momentenpunkt A dar. Geht man aber von der Ebene ε zu irgend einer anderen Ebene ε' über, womit \mathfrak{R}_ε in $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ vertauscht wird, so ist das Moment von $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ für den Punkt A gleich dem Momente von \mathfrak{R}_ε . Dies folgt am einfachsten daraus, dass $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ durch eine Zerlegung von \mathfrak{R}_ε in zwei Componenten erhalten wurde, von denen die andere durch den Punkt A ging, so dass deren Moment verschwindet. Das Momentendreieck $A\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ hat demnach gleichen Inhalt mit dem Momentendreiecke $A\mathfrak{R}_\varepsilon$ oder mit anderen Worten: die Tetraeder der beiden Kraftkreuze, die wir uns jetzt mit einander zu vergleichen anschicken, haben Basisflächen von gleichem Inhalte.

Wir betrachten ferner die Höhen beider Tetraeder. Vorher war schon bemerkt, dass die zur Ebene α senkrechte Componente von \mathfrak{R}_A die Höhe des zum Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A\mathfrak{R}_\varepsilon$ gehörigen Tetraeders darstellt. Gehen wir zur Ebene ε' und hiermit zu dem anderen Kraftkreuze über, so ändert sich auch \mathfrak{R}_A , sagen wir in \mathfrak{R}'_A ; und zwar wird \mathfrak{R}'_A als Resultirende von \mathfrak{R}_A und der durch den Punkt A gehenden Componente von \mathfrak{R}_ε gefunden. Da aber diese Componente in der Ebene α enthalten ist, kann sie durch ihren Zutritt zu \mathfrak{R}_A nichts an der zu α senkrechten Componenten ändern. Will man sich dies noch weiter klar machen, so denke man sich nur \mathfrak{R}_A , die Componente von \mathfrak{R}_ε und die aus ihnen gebildete Resultirende \mathfrak{R}'_A auf die Normale zur Ebene α projicirt. Da die Componente von \mathfrak{R}_ε senkrecht zur Normalen steht, muss die Projektion von \mathfrak{R}'_A gleich der von \mathfrak{R}_A sein. Mit anderen Worten heisst dies, dass die beiden Tetraeder, die wir jetzt mit einander vergleichen, gleiche Höhen haben. Da auch die Basisflächen gleich waren, sind demnach die Tetraeder inhaltsgleich.

Hiermit ist der Satz zunächst für alle Kraftkreuze bewiesen, von denen die eine Kraft \mathfrak{R}_A von demselben Angriffspunkte A ausgeht, während die andere in der Nullebene α liegt. Ehe wir ihn auf die übrigen Fälle übertragen, wollen wir uns überlegen, welche Deutung dem Tetraederinhalte gegeben werden kann. Wir sahen schon, dass die Basisfläche

das Momentendreieck von \mathfrak{R}_e für den Punkt A angibt. Bezeichnen wir die Fläche dieses Dreiecks mit F , den Winkel zwischen der Normalen zu α und \mathfrak{R}_A mit γ und die Grösse von \mathfrak{R}_A mit R_A , so ist das Tetraedervolumen gleich

$$\frac{1}{3} F \cdot R_A \cos \gamma.$$

Hier können wir den Faktor $\cos \gamma$ auch zu F nehmen und das Produkt $F \cos \gamma$ stellt dann die Projektion des Momentendreiecks auf eine zu \mathfrak{R}_A senkrechte Ebene dar, d. h. das Produkt bildet das Maass für das statische Moment der einen Kraft \mathfrak{R}_e des Kraftkreuzes in Bezug auf die Richtungslinie der anderen Kraft \mathfrak{R}_A als Momentenaxe. Der Inhalt des Tetraeders selbst ist demnach dem Produkte aus einer Kraft des Kraftkreuzes und dem in Bezug auf deren Wirkungslinie als Momentenaxe genommenen Momente der anderen Kraft proportional.

Hieraus folgt auch sofort, dass sich der Inhalt des Tetraeders nicht ändern kann, wenn man den Angriffspunkt einer Kraft des Kraftkreuzes längs deren Wirkungslinie verschiebt, ohne sonst etwas zu ändern. Im Uebrigen ist dies eine rein geometrische Eigenschaft des Tetraeders, die auch geometrisch, ohne Bezugnahme auf die mechanische Bedeutung, die dem Tetraeder in unserem Falle zukommt, leicht bewiesen werden kann.

Kehren wir nun zu unserem Satze zurück, so erkennen wir leicht, dass wir von einem der Kraftkreuze, deren eine Kraft im Punkte A angriff, durch blosse Verschiebung des Angriffspunktes längs der Richtungslinie sofort auch zu einem Kraftkreuze übergehen können, dessen eine Kraft durch irgend einen anderen Punkt B dieser Richtungslinie geht. Das Tetraedervolumen wird hierbei nicht geändert. Zugleich wissen wir, dass sich das Tetraedervolumen auch weiterhin nicht ändert, wenn wir dieses Kraftkreuz in irgend ein anderes umwandeln, bei dem B als Angriffspunkt der einen Kraft festgehalten wird; denn was vorher von dem beliebig gewählten Punkte A bewiesen wurde, gilt ohne Weiteres auch für den jetzt mit B bezeichneten

Punkt. Durch wiederholte Umwandlungen dieser Art können wir aber auch zu allen anderen der unter sich gleichwerthigen Kraftkreuze gelangen und damit folgt in der That, dass deren Tetraederinhalte sämmtlich unter einander gleich sind.

§ 27. Die Centralaxe eines Kräftesystems.

Man denke sich ein Kräftesystem, so wie es in § 25 beschrieben war, auf eine durch irgend einen Punkt A geführte Resultirende \mathfrak{R} und ein resultirendes Moment \mathfrak{M} zurückgeführt. Die Richtung von \mathfrak{R} gibt die „Axenrichtung“ des Kräftesystems oder des dadurch bestimmten Nullsystems an. Der Uebergang vom Punkte A zu irgend einem anderen Punkte A' kann dann leicht bewirkt werden. Wir verlegen zu diesem Zwecke \mathfrak{R}

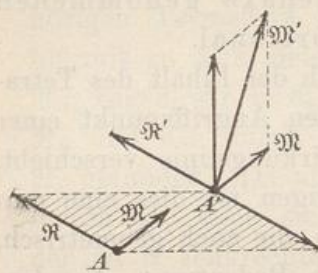


Abb. 68.

parallel zu sich selbst und in gleicher Grösse als \mathfrak{R}' nach dem Punkte A' . Hierbei tritt noch ein neues Kräftepaar auf aus den Kräften \mathfrak{R} und $-\mathfrak{R}'$, dessen Momentenvektor mit \mathfrak{M} zu einem neuen resultirenden Momente \mathfrak{M}' zusammengesetzt ist.

In Abb. 68 ist dies in axonometrischer Zeichnung angedeutet.

Das Parallelogramm des bei der Parallelverlegung der Resultirenden \mathfrak{R} von A nach A' entstehenden Kräftepaars ist durch Schraffirung hervorgehoben; senkrecht zur Parallelogrammfläche ist der Momentenvektor angetragen, der keine besondere Bezeichnung erhalten hat. \mathfrak{M} kann von A nach A' ohne Weiteres verlegt werden, da ein Momentenvektor ein völlig freier Vektor ist. Das resultirende Moment \mathfrak{M}' ist mit Hilfe eines Parallelogramms ermittelt, das genau wie ein Kräfteparallelogramm aufzuzeichnen ist.

Zunächst finden wir bei dieser Construction von Neuem bestätigt, dass Grösse und Richtung der Resultirenden \mathfrak{R} von der besonderen Wahl des Punktes A unabhängig sind. Nur der Momentenvektor \mathfrak{M} ändert sich infolge der Verschiebung