



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 25. Praktische Ausführung und specielle Fälle

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

jeder Polygonebene in der ersten Figur eine Ecke in der zweiten (nämlich der zur Ebene gehörige Nullpunkt) und jeder Ecke in der ersten Figur eine Polygonebene in der zweiten (nämlich die zur Ecke gehörige Nullebene) entspricht. Hierauf denke man sich beide Polyeder in der Axenrichtung auf eine beliebige Ebene projicirt. Nach dem, was wir vorher sahen, liefern die zueinander conjugirten Geraden parallele Projektionen. Die Projektionen beider Polyedermäntel stehen daher genau in demselben Verhältnisse zueinander wie die reciproken Figuren, mit denen wir früher bei der Zusammensetzung von Kräften in der Ebene und bei der Construction von Kräfteplänen zu thun hatten. Jeder Linie der einen Figur entspricht eine zu ihr parallele Linie in der anderen; jeder Ecke der einen ein Polygon in der anderen und umgekehrt.

Durch diese von Cremona herrührende Betrachtung ist der Zusammenhang zwischen der in der graphischen Statik vorkommenden reciproken Verwandtschaft mit den allgemeinen projektivischen Beziehungen, mit deren Untersuchung man sich in der Geometrie befasst, hergestellt. Man kann auch, wie Schur gezeigt hat, das Nullsystem direkt benutzen, um den Kräfteplan für ein Fachwerk, das hierbei als Projektion eines solchen Polyedermantels aufgefasst wird, zu construiren. Für die praktische Anwendung, die auch ohne solche, theoretisch interessante, in der Ausführung aber schwerer zu übersehende Hilfsmittel leicht zum Ziele gelangt, wird aber damit nicht viel gewonnen.

§ 25. Praktische Ausführung und specielle Fälle.

Für die praktische Durchführung einer Kräftezusammensetzung im Raume empfiehlt es sich am meisten, die unendlich ferne Ebene zur Ebene ε zu wählen, d. h. die Kräfte auf eine durch einen beliebig gewählten Punkt A gehende Resultirende \mathfrak{R} und ein resultirendes Moment \mathfrak{M} zurückzuführen. Die Wahl des Punktes A wird dabei oft durch die besonderen Umstände der Aufgabe nahegelegt. Die Resultirende \mathfrak{R} findet man jeden-

falls immer leicht durch graphische Summirung der gegebenen Kräfte, also so wie in § 1, Abb. 1, indem es hierfür ganz gleichgültig ist, ob die Kräfte an demselben oder an verschiedenen Angriffspunkten angreifen.

Um \mathfrak{M} zu erhalten, könnte man unmittelbar nach der bisher schon besprochenen Vorschrift verfahren, indem man zu jedem Kräftepaare, das bei der Parallelverlegung einer Kraft nach dem Punkte A entsteht, den Momentenvektor durch seine Projektionen darstellt und dann alle Momentenvektoren ebenso graphisch summirt, wie vorher die Kräfte. Einfacher gelangt man aber auf anderem Wege zum Ziele. Verbindet man nämlich in jedem Risse die Projektion des Punktes A mit den Endpunkten der Projektion einer der Kräfte \mathfrak{F} , so erhält man die Projektionen des zur Kraft \mathfrak{F} gehörigen, im Raume liegenden Momentendreiecks in den Projektionsebenen. Aus Band I, § 17 (Abb. 14 der 2. Aufl.) ist aber bereits bekannt, dass die senkrechte Projektion des Momentendreiecks auf eine Ebene zugleich das Moment der Kraft \mathfrak{F} für eine durch den Punkt A senkrecht zur Projektionsebene gezogene Axe darstellt. Man braucht daher nur in jeder Projektionsebene die algebraische Summe der Momente der Kräfteprojektionen in Bezug auf die Projektion des Punktes A als Momentenpunkt zu bilden, um damit sofort die senkrecht zu dieser Projektionsebene stehende Componente des resultirenden Momentes \mathfrak{M} zu erhalten. Diese Zusammensetzung kann in jedem Risse sofort leicht vorgenommen werden. Hatte man nun den Körper mit allen an ihm angreifenden Kräften von vornherein in drei zueinander senkrechten Rissen gezeichnet, so findet man nach der algebraischen Summirung der Momente der Kräfteprojektionen in diesen Rissen — oder der ihnen entsprechenden Flächen der Momentendreiecke — zugleich drei zueinander rechtwinklig stehende Componenten von \mathfrak{M} . Man braucht dann nur noch die graphische Summirung dieser drei Componenten vorzunehmen, um \mathfrak{M} selbst zu erhalten. — An einem Beispiele unter den Aufgaben wird dies vollständig in der Zeichnung durchgeführt werden.

Wir wollen ferner den besonderen Fall betrachten, dass am starren Körper nur drei windschief zu einander liegende Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ vorkommen. Auf ein Kraftkreuz kann man diese, wie wir schon wissen, unter allen Umständen zurückführen. Es fragt sich aber jetzt, ob sich die Kräfte etwa ausnahmsweise auch im Gleichgewichte halten können, oder ob sie wenigstens durch eine einzige Resultirende ersetzt werden können oder ob sie schliesslich einem Kräftepaare gleichwerthig sein können. Der erste Fall kann, wie man leicht erkennt, niemals vorkommen. Man denke sich etwa durch \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 irgend eine Gerade gelegt, die \mathfrak{P}_3 nicht schneidet. Da die Kräfte windschief zu einander, also jedenfalls nicht alle in derselben Ebene liegen sollten, wird man sehr viele Geraden ziehen können, die dieser Bedingung entsprechen. Wählt man eine von ihnen als Momentenaxe, so verschwindet für sie das Moment von \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 , während das Moment von \mathfrak{P}_3 jedenfalls von Null verschieden ist. Die Momentensumme wird also nicht zu Null, während doch für Kräfte, die Gleichgewicht miteinander halten sollen, das Moment für jede Momentenaxe zu Null werden muss. Gleichgewicht zwischen drei windschief liegenden Kräften ist daher niemals möglich.

Um die zweite Frage zu entscheiden, betrachten wir zunächst nur die beiden Kräfte \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 , die für sich genommen ein Kraftkreuz darstellen. Wir denken uns dieses in ein ihm gleichwerthiges umgewandelt, von dem eine Kraft mit der Wirkungslinie von \mathfrak{P}_3 zusammenfällt. Diese kann dann mit \mathfrak{P}_3 vereinigt werden und die Resultirende liefert im Allgemeinen in Verbindung mit der anderen Kraft des Kraftkreuzes das neue Kraftkreuz, das die drei gegebenen Kräfte ersetzt. Es kann aber auch vorkommen, dass die auf die Richtungslinie von \mathfrak{P}_3 fallende Kraft des die Kräfte \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 ersetzenden Kraftkreuzes zufällig gleichgross und entgegengesetzt gerichtet mit \mathfrak{P}_3 ist. In diesem Falle verschwindet die Resultirende aus beiden und es bleibt nur noch die andere Kraft des Kraftkreuzes übrig, die nun die drei gegebenen

Kräfte vollständig ersetzt. Ausnahmsweise kann daher, wie wir hieraus erkennen, ein Verein von drei windschief zu einander liegenden Kräften auch schon durch eine einzige Resultirende ersetzt werden.

Sollen endlich die drei Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ einem Kräftepaare gleichwerthig sein, so muss jedenfalls die geometrische Summe der drei Kräfte gleich Null sein. Dies kann aber vorkommen. Damit es möglich sei, müssen die drei Richtungslinien zu einer Ebene parallel sein. Sind dann ausserdem die Grössen so gewählt, dass sich die Strecken $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ zu einem Dreiecke mit aufeinanderfolgenden Pfeilen aneinanderreihen lassen, so verschwindet für jeden Punkt A die Resultirende \mathfrak{R} und es bleibt nur noch das Moment \mathfrak{M} übrig. Ausnahmsweise können also drei windschief zu einander liegende Kräfte auch einem Kräftepaare gleichwerthig sein.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch für vier windschief zu einander liegende Kräfte anstellen. Vor allem erkennt man hier, dass unter Umständen vier windschiefe Kräfte auch im Gleichgewichte mit einander stehen können. Man braucht, um sich davon zu überzeugen, nur irgend zwei einander gleichwerthige Kraftkreuze ins Auge zu fassen. Kehrt man dann in einen Kraftkreuze die Pfeile beider Kräfte um, so stehen diese mit dem anderen Kraftkreuze im Gleichgewichte. Natürlich müssen in diesem Falle drei der vier Kräfte eine Resultirende ergeben und diese muss überdies mit der vierten Kraft zusammenfallen, ihr gleich und entgegengesetzt gerichtet sein.

Man kann noch eine andere einfache Bedingung anführen, der vier windschiefe Kräfte genügen müssen, wenn sie im Gleichgewichte miteinander stehen sollen. Durch drei windschiefe Graden kann man nämlich sehr viele grade Linien ziehen, die alle drei schneiden und zwar ist durch jeden Punkt der ersten Graden eine Linie zu ziehen, die zugleich die beiden anderen trifft, wie aus einer einfachen geometrischen Betrachtung hervorgeht. Alle diese schneidenden Graden bilden eine Regelschaar und die drei gegebenen Graden gehören zu einer

zweiten Regelschaar, die mit jener zusammen auf demselben Hyperboloide liegt. Man denke sich nun irgend eine von jenen Graden ausgewählt, die etwa die Richtungslinien der drei Kräfte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ schneidet. Betrachtet man sie als Momentenaxe, so verschwindet für sie das Moment jener drei Kräfte. Wenn Gleichgewicht bestehen soll, muss daher auch das Moment von \mathfrak{P}_4 verschwinden, d. h. die Grade muss von selbst auch die Richtungslinie von \mathfrak{P}_4 schneiden. Da dies von jeder Graden zutrifft, die drei der Kräfte schneidet, so folgt als Gleichgewichtsbedingung für vier Kräfte, dass sie alle vier zu einer Regelschaar gehören müssen, oder dass sie, wie man sich ausdrückt, hyperboloidisch zueinander liegen müssen. Dieser Satz gilt natürlich ebenso auch für zwei einander gleichwerthige Kraftkreuze, da man diesen Fall, wie wir vorher sahen, durch blosse Umkehrung der Pfeile in einen Kraftkreuz auf einen Gleichgewichtsfall zurückführen kann. — Ausserdem können vier Kräfte ausnahmsweise auch durch eine einzige Resultirende oder durch ein einziges Kräftepaar ersetzt werden; es ist aber nicht nöthig, darauf näher einzugehen.

Dass auch fünf oder noch mehr zu einander windschief liegende Kräfte ausnahmsweise im Gleichgewichte mit einander stehen können, ist nach dem Vorhergehenden schon ohne Weiteres klar. Bei fünf Kräften dürfen indessen nicht vier derselben hyperboloidisch zu einander liegen, falls nicht auch die fünfte auf dem gleichen Hyperboloide liegt. Man würde nämlich sonst Momentenaxen legen können, die vier Kräfte treffen, die fünfte aber nicht und die Momentensumme könnte dann für diese Momentenaxen nicht zu Null werden. Liegen keine vier von den fünf Richtungslinien auf demselben Hyperboloide, so kann man sich eine Regelschaar durch drei derselben gelegt denken. Diese trifft dann (als Fläche zweiter Ordnung) die beiden anderen Richtungslinien in je zwei Punkten und diese Punkte müssen, damit keine Momentenaxe möglich ist, die nur vier von den fünf Richtungslinien schneidet, paarweise auf denselben beiden Strahlen der

Regelschaar enthalten sein. Fünf windschiefe Kräfte können daher jedenfalls nur dann im Gleichgewichte miteinander sein, wenn man mindestens zwei grade Linien ziehen kann, die alle fünf Richtungslinien schneiden.

§ 26. Das Kraftkreuz-Tetraeder.

Irgend ein Kraftkreuz sei gegeben, dessen Kräfte \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 durch Strecken auf beiden Wirkungslinien zur Darstellung gebracht sind. Man denke sich die vier Endpunkte dieser Strecken durch vier Verbindungsstrecken miteinander verbunden. Hierdurch wird ein Tetraeder gebildet, in dem \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 zwei einander gegenüber liegende Kanten darstellen. Man kann zeigen, dass für alle unter einander gleichwerthigen Kraftkreuze die in dieser Weise construirten Tetraeder gleichen Inhalt haben.

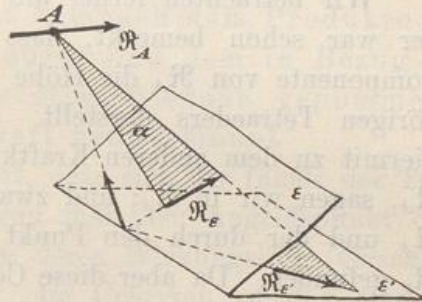


Abb. 64.

Den Beweis führt man am einfachsten auf Grund der in § 23 im Anschlusse an die hier wieder abgedruckte Abb. 64 durchgeführten Betrachtung. Es zeigte sich dort, dass die zweite Kraft des Kraftkreuzes \mathfrak{R}_E oder $\mathfrak{R}_{E'}$ in einer Ebene α enthalten sein muss, wenn die erste Kraft \mathfrak{R}_A durch einen beliebig gewählten Punkt A gehen soll. Dabei ist α die Nullebene des Punktes A . Verbindet man in Abb. 64 den Punkt A , der als Anfangspunkt der Strecke \mathfrak{R}_A gewählt sein möge, mit den Endpunkten der Strecke, durch die \mathfrak{R}_E oder $\mathfrak{R}_{E'}$ dargestellt wird, so erhält man eines der vier Dreiecke, die die Seitenflächen des zugehörigen Kraftkreuz-Tetraeders ausmachen. Wir wollen dieses in der Ebene α liegende Dreieck als die Basis des Tetraeders betrachten; die zugehörige Höhe wird dann durch die Projektion der von A aus abgetragenen Strecke \mathfrak{R}_A auf eine zur Ebene α errichtete Normale dargestellt.

Nun stellt die Basisfläche des Tetraeders oder das Drei-