Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 24. Das Nullsystem

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

§ 24. Das Nullsystem.

Dadurch, dass zu einem beliebig gegebenen Kräftesysteme unendlich viele gleichwerthige Kraftkreuze gehören, zwischen denen die im vorigen Paragraphen besprochenen Beziehungen bestehen, wird eine eigenthümliche Zuordnung von Geraden, Punkten und Ebenen im Raume geschaffen, die jetzt noch etwas näher untersucht werden soll.

Wir sahen bereits, dass mit Ausnahme der Nulllinien, auf die ich alsbald noch zurückkommen werde, jede Gerade des Raumes als Wirkungslinie der einen Kraft des Kraftkreuzes angesehen werden kann und dass ihr dann eine zweite Gerade als Wirkungslinie der anderen Kraft des Kraftkreuzes in eindeutiger Weise zugeordnet ist. Dabei ist diese Zuordnung vollständig durch das gegebene Kräftesystem bestimmt oder auch schon durch Angabe eines einzigen der unendlich vielen Kraftkreuze, die dem gegebenen Kräftesysteme sämmtlich und zugleich auch unter einander gleichwerthig sind. Die beiden zusammengehörigen Wirkungslinien eines dieser Kraftkreuze werden als conjugirte Geraden des Nullsystemes bezeichnet. Unter dem Nullsysteme selbst versteht man nämlich den ganzen unendlichen Raum, dessen einzelne Elemente — Geraden, Punkte und Ebenen — durch das Kräftesystem in der besprochenen Weise auf einander bezogen sind.

Denkt man sich durch irgend einen Punkt A des Raumes alle Linien gezogen, die als Wirkungslinien der einen Kraft des Kraftkreuzes angesehen werden können, so liegen alle ihnen conjugirten Linien nach einem vorher schon bewiesenen Satze in einer Ebene α, die durch A hindurchgeht. Wir können dies dahin aussprechen, dass jedem Strahlenbündel A im Nullsysteme ein ebenes System α conjugirt ist, dessen Ebene durch A geht. Umgekehrt ist jedem ebenen Systeme ein Strahlenbündel conjugirt, dessen Strahlencentrum in der Ebene des ebenen Systems enthalten ist.

Alle Linien, die gleichzeitig durch A gehen und in der zu A conjugirten Ebene α liegen, sind Nulllinien. Wir können hiernach sagen, dass jede Nulllinie sich selbst conjugirt ist. Als Wirkungslinie der einen Kraft eines der Kraftkreuze kann eine Nulllinie niemals in Frage kommen. Durch jeden Punkt des Raumes gehen unendlich viele Nulllinien, die alle in der Nullebene dieses Punktes enthalten sind und in ihm einen Strahlenbüschel bilden. Auch in jeder Ebene des Raumes liegen unendlich viele Nulllinien, die in dieser Ebene einen Strahlenbüschel bilden, dessen Centrum der Nullpunkt der Ebene ist.

In jedem Nullsysteme kommt ferner eine vor allen anderen ausgezeichnete Richtung vor, die man als die Axenrichtung des Nullsystems bezeichnet. Man denke sich nämlich als Ebene ε, von der seither immer die Rede war und die ganz beliebig gewählt sein konnte, jetzt die unendlich ferne Ebene des Raumes angenommen. Jede Kraft $\mathfrak{P}$ ist dann in eine durch den beliebig angenommenen Punkt A und eine in der unendlich fernen Ebene liegende Componente zu zerlegen. Die letzte Componente fällt, wie schon aus der in § 21 gegebenen Construction, wenn man sie auf den vorliegenden Fall anwendet, hervorgeht, unendlich klein aus. Dies folgt auch noch daraus, dass das Moment für jede im Endlichen liegende Axe endlich bleiben muss, so dass die Kraft selbst wegen des unendlich grossen Hebelarmes unendlich klein sein muss. Eine unendlich kleine, unendlich ferne Kraft ist übrigens, wie wir wissen, gleichbedeutend mit einem Kräftepaare. Die durch den Punkt A gehende Componente der Kraft $\mathfrak{P}$ ist im vorliegenden Falle gleichgross und gleichgerichtet mit $\mathfrak{P}$. Sobald wir die unendlich ferne Ebene zur Ebene ε wählen, kommt demnach die Kräftezusammensetzung darauf hinaus, dass alle gegebenen Kräfte $\mathfrak{P}$ in gleicher Grösse und paralleler Richtung nach dem Punkte A verlegt und dort zu einer Resultirenden $\mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{P}$ vereinigt werden, während zugleich die bei der Parallelverlegung entstehenden Kräftepaare zu einem resultirenden Paare zusammengesetzt werden, dessen Momentenvektor mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet werden mag. Der Verein von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ ersetzt dann das gegebene Kräftesystem ebenfalls vollständig. Dabei ist es praktisch, nämlich weil wir in der unendlich fernen Ebene nicht unmittelbar zeichnen können, nöthig, die Zusammensetzung der Kräftepaare nach den dafür direkt aufgestellten Vorschriften auszuführen. Dies hindert aber nicht, zur Aufrechterhaltung des Zusammenhanges mit dem vorher untersuchten allgemeineren Falle, jedes Kräftepaar als gleichwerthig mit einer in der unendlich fernen Ebene ε liegenden unendlich kleinen Kraft anzusehen und daher auch das resultirende Moment $\mathfrak{M}$ als Vertreter einer in dieser Ebene enthaltenen Kraft zu betrachten. Von diesem Gesichtspunkte aus angesehen, stellt daher auch der Verein von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ ein Kraftkreuz dar.

Wechseln wir nun den Punkt A, behalten aber die unendlich ferne Ebene als Ebene ε bei, so muss nach einem schon früher bewiesenen Satze die durch einen beliebigen Punkt A gehende Kraft des Kraftkreuzes stets durch einen in ε liegenden Punkt E, d. h. durch den Nullpunkt der unendlich fernen Ebene hindurchgehen. Mit anderen Worten heisst dies, dass die durch A gehende Kraft $\mathfrak{R}$, wie man auch A wählen möge, stets in dieselbe Richtung fallen muss. Dies folgt übrigens auch schon daraus, dass $\mathfrak{R}$ stets $= \Sigma\mathfrak{P}$ ist, sobald die unendlich ferne Ebene zur Ebene ε genommen wird. Die Richtung von $\mathfrak{R} = \Sigma\mathfrak{P}$ bezeichnet uns daher in ihrer Fortsetzung bis ins Unendliche den Nullpunkt der unendlich fernen Ebene; sie ist es, die man als die Axenrichtung des Nullsystems bezeichnet.

Wir wollen uns die Axenrichtung, die in jedem Falle durch Ausführung der geometrischen Summirung an allen Kräften $\mathfrak{P}$ leicht gefunden werden kann, markirt denken und die Beziehung, die zwischen ihr und irgend zwei conjugirten Geraden des Nullsystems besteht, näher untersuchen. In Abb. 67 seien l und l' (die man sich windschief zu einander denken muss) zwei conjugirte Geraden und $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_{l'}$ seien die beiden Kräfte des Kraftkreuzes, die zu diesen beiden Wirkungslinien gehören. Jedenfalls ist nun die geometrische Summe aus $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_{l'}$ gleich der geometrischen Summe $\Sigma\mathfrak{P}$

aus allen Kräften des ursprünglich gegebenen Kräftesystems. Reiht man also, wie es in der Abbildung geschehen ist, $\mathfrak{R}_{l'}$ an $\mathfrak{R}_l$ graphisch an, so stellt die dritte Seite des entstehenden Kräftedreiecks die geometrische Summe $\mathfrak{R}$ oder $\Sigma\mathfrak{P}$ aus den gegebenen Kräften dar. Diese Seite fällt also in die Axenrichtung des Nullsystemes; in der Abbildung ist ihr daher auch noch die darauf hinweisende Bezeichnung aa beigeschrieben. Die Ebene des Dreiecks ist in der Abbildung schraffirt. Diese Ebene muss parallel zu l' gehen, da eine Seite des in ihr enthaltenen Dreiecks parallel zu l' gezogen war. Legt man also durch eine der conjugirten Geraden l und durch die Axenrichtung aa eine Ebene, so ist diese Ebene der anderen der conjugirten Geraden l' parallel.

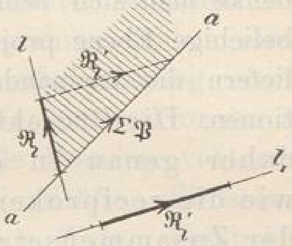

Abb. 67.

Die durch aa und eine Gerade l gelegte Ebene kann auch als jene Ebene bezeichnet werden, durch die die Gerade l in der Axenrichtung aa projicirt wird. Mit dieser anschaulicheren Bezeichnungsweise können wir das vorher gefundene Resultat in dem Satze aussprechen, dass conjugirte Geraden in der Axenrichtung durch parallele Ebenen projicirt werden. Offenbar gilt nämlich das, was vorher für die Gerade l bewiesen wurde, ebenso auch für die andere Gerade l'; auch l' wird in der Axenrichtung durch eine Ebene projicirt, die zu l parallel geht.

An diese Betrachtung knüpft sich noch eine bemerkenswerthe Folgerung. Man denke sich nämlich irgendwie eine Anzahl von Strecken gezogen, die mit den Endpunkten aneinander stossen, so dass eine Anzahl aneinander grenzender Polygone entsteht, die im Zusammenhange entweder einen ganzen Polyedermantel oder einen Theil eines solchen bilden. Betrachtet man die so erhaltene räumliche Figur als Bestandtheil eines Nullsystems, so kann man zu jeder der in ihr enthaltenen Geraden die conjugirte Gerade aufsuchen. Man erhält dann eine zweite polyedrische Figur und zwar so, dass jeder Polygonebene in der ersten Figur eine Ecke in der zweiten (nämlich der zur Ebene gehörige Nullpunkt) und jeder Ecke in der ersten Figur eine Polygonebene in der zweiten (nämlich die zur Ecke gehörige Nullebene) entspricht. Hierauf denke man sich beide Polyeder in der Axenrichtung auf eine beliebige Ebene projicirt. Nach dem, was wir vorher sahen, liefern die zueinander conjugirten Geraden parallele Projektionen. Die Projektionen beider Polyedermäntel stehen daher genau in demselben Verhältnisse zueinander wie die reciproken Figuren, mit denen wir früher bei der Zusammensetzung von Kräften in der Ebene und bei der Construction von Kräfteplänen zu thun hatten. Jeder Linie der einen Figur entspricht eine zu ihr parallele Linie in der anderen; jeder Ecke der einen ein Polygon in der anderen und umgekehrt.

Durch diese von Cremona herrührende Betrachtung ist der Zusammenhang zwischen der in der graphischen Statik vorkommenden reciproken Verwandtschaft mit den allgemeinen projektivischen Beziehungen, mit deren Untersuchung man sich in der Geometrie befasst, hergestellt. Man kann auch, wie Schur gezeigt hat, das Nullsystem direkt benutzen, um den Kräfteplan für ein Fachwerk, das hierbei als Projektion eines solchen Polyedermantels aufgefasst wird, zu construiren. Für die praktische Anwendung, die auch ohne solche, theoretisch interessante, in der Ausführung aber schwerer zu übersehende Hülfsmittel leicht zum Ziele gelangt, wird aber damit nicht viel gewonnen.

§ 25. Praktische Ausführung und specielle Fälle.

Für die praktische Durchführung einer Kräftezusammensetzung im Raume empfiehlt es sich am meisten, die unendlich ferne Ebene zur Ebene ε zu wählen, d. h. die Kräfte auf eine durch einen beliebig gewählten Punkt A gehende Resultirende $\mathfrak{R}$ und ein resultirendes Moment $\mathfrak{M}$ zurückzuführen. Die Wahl des Punktes A wird dabei oft durch die besonderen Umstände der Aufgabe nahegelegt. Die Resultirende $\mathfrak{R}$ findet man jeden-