Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 22. Zusammensetzung von Kräftepaaren

und die Kraft $\mathfrak{P}$ ist in eine durch A gehende Kraft, die mit $\mathfrak{P}$ gleich gross und gleich gerichtet ist und in eine unendlich kleine und unendlich ferne Kraft zu zerlegen, deren Richtungslinie mit der unendlich fernen Graden der Ebenen ε und π zusammenfällt, zu zerlegen. Wenn man die Benutzung der unendlich fernen Elemente zur Durchführung der Betrachtung nicht scheut, ist daher auch in diesem Falle die verlangte Zerlegung von $\mathfrak{P}$ sofort ausgeführt. Anstatt dessen kann man auch sagen, dass bei der Parallelverlegung von $\mathfrak{P}$ nach A ein Kräftepaar auftritt, dessen Ebene parallel zu ε ist und das nachträglich in die Ebene ε verschoben werden kann. Dann ist $\mathfrak{P}$ durch eine Einzelkraft am Punkte A und ein Kräftepaar in der Ebene ε ersetzt. — Die fernere Zusammensetzung der Kräfte am Punkte A und in der Ebene ε kann aber auf jeden Fall genau so erfolgen, als wenn diese besonderen Lagen gar nicht vorgekommen wären.

§ 22. **Zusammensetzung von Kräftepaaren.**

Von den Eigenschaften der Kräftepaare war schon früher, namentlich im ersten Bande, wiederholt die Rede. Hier wird es aber nöthig, das Wichtigste davon noch einmal zusammenzustellen und die Betrachtungen zugleich so weit zu ergänzen, als erforderlich ist, um den Gegenstand vollständig zu erledigen.

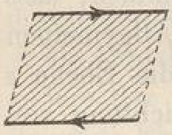
Abb. 56.

Zunächst erinnere ich daran, dass als graphische Darstellung eines Kräftepaars das Parallelogramm betrachtet werden kann, von dem zwei gegenüberliegende Seiten die beiden Kräfte des Paars angeben (vgl. Abb. 56). Wählt man irgend einen Punkt in der Ebene des Kräftepaars als Momentenpunkt, so ist das Moment des Kräftepaars — worunter man die Summe der Momente beider Kräfte versteht — stets gleich gross und der Werth dieses Moments wird durch den Flächeninhalt des Parallelogramms angegeben. Das Vorzeichen des Moments folgt zugleich aus dem Umlaufssinne, der durch die Pfeile beider Kräfte bestimmt ist.

Wir wollen uns nun überlegen, welche Veränderungen man mit dem Kräftepaare und mit seinem sichtbaren Ausdrucke, dem Parallelogramme, vornehmen darf, ohne an dem Verhalten des Körpers, an dem es angreift, etwas zu ändern. Ohne Weiteres folgt zunächst, dass das Parallelogramm beliebig innerhalb seines Parallelstreifens verschoben werden darf, so lange nur die beiden Grundlinien, die die Kräfte darstellen, hierbei ihre Längen und das Parallelogramm selbst daher seinen Inhalt nicht ändern. An Stelle des Parallelogramms I in Abb. 57 kann also ohne Weiteres das Parallelogramm II gewonnen werden. Dies folgt nämlich sofort aus dem Satze von der Verschiebung des Angriffspunktes, indem II aus I durch blosse Verschiebungen der Angriffspunkte beider Kräfte des Paares längs ihrer Richtungslinien hervorgeht.

Abb. 57.

Ferner kann man innerhalb des Parallelogramms eine Vertauschung jener Seiten vornehmen, die man als Darstellungen der beiden Kräfte des Paars betrachtet. Der Beweis für diese Behauptung ergibt sich aus Abb. 58. In dieser sei zunächst das Kräftepaar der Kräfte 1 und 1′ gegeben. Man füge ihnen zwei neue Kräfte 2 und 2′ zu, die sich gegenseitig aufheben und von denen jede so gross ist, wie es der Diagonale des Parallelogramms entspricht, mit der ihre Richtungslinien zusammenfallen. Setzt man nun 1 und 2 zu einer Resultirenden 3 zusammen, so geht diese durch den Schnittpunkt ihrer Richtungslinien und Grösse und Richtung ergibt sich durch geometrische Summirung aus 1 und 2. Es ist nicht nöthig, dazu ein besonderes Kräftedreieck zu zeichnen, da schon innerhalb des vorhandenen Parallelogramms ein Dreieck vorkommt, von dem eine Seite die Kraft 1, die andere die Kraft 2 darstellt. Die dritte Seite gibt daher Grösse und Richtung der Resultirenden 3 an und man erkennt, dass diese Kraft durch die mit der Ziffer 3 be-

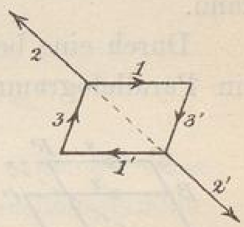

Abb. 58.

zeichnete Parallelogrammseite schon vollständig nach Grösse, Richtung und Lage dargestellt ist. Hierbei ist nur der Angriffspunkt auf den nächsten Eckpunkt des Parallelogramms längs der Richtungslinien zurückverlegt. Ebenso geben die Kräfte 1′ und 2′ die durch die Parallelogrammseite 3′ dargestellte Resultirende.

Damit ist aber der Satz bewiesen, denn in der That ist gezeigt, dass das Kräftepaar aus 1 und 1′ durch Zufügung der beiden sich gegenseitig aufhebenden Kräfte 2 und 2′ in das Kräftepaar aus 3 und 3′ übergeführt werden kann, das demnach mit dem vorigen gleichwerthig ist. Es ist daher gar nicht nöthig, beim Auftragen eines Parallelogramms zur Darstellung eines Kräftepaars genauer anzugeben, welches Paar Gegenseiten die Kräfte des Paars bezeichnen soll; man kann es vielmehr dem freien Belieben anheimstellen, welches Paar dazu gewählt werden soll, wenn nur der Umlaufssinn, der durch die Aufeinanderfolge der Pfeile bedingt ist, näher bezeichnet wird, was etwa durch Beifügung eines Drehpfeiles geschehen kann.

Durch eine bekannte planimetrische Construction lässt sich ein Parallelogramm in ein anderes verwandeln, das gleichen Inhalt hat und dessen Grundlinie daher in demselben Verhältnisse verkleinert, als die Höhe vergrössert ist (oder umgekehrt). Betrachtet man beide Parallelogramme als Darstellungen von Kräftepaaren von gleichem Umlaufssinne, so sind auch beide Kräftepaare gleichwerthig mit einander, so dass sich das eine durch das andere ersetzen lässt. Der Beweis folgt aus Abb. 59. Man hat zunächst das Parallelogramm $ABCD$, in dem die Seiten DA und BC die Kräfte 1 und 2 des ursprünglich gegebenen Kräftepaars darstellen. Nachdem das inhaltsgleiche Parallelogramm $AEFG$ construirt ist, denke man sich die Kraft 2 in zwei parallele Componenten 3 und 4 zerlegt, von denen eine auf die Grundlinie AG oder AD, die andere auf die Gegenseite EF fällt. Die Summe aus den

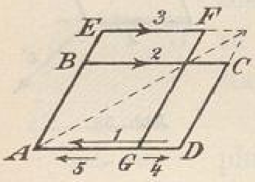

Abb. 59.

Kräften 3 und 4 muss gleich 2 sein und ausserdem muss für einen auf 2 liegenden Momentenpunkt das Moment von 3 gleich gross und entgegengesetzt gerichtet dem Momente von 4 sein. Daraus folgt, dass die gesuchte Kraft 3 durch die Strecke EF und die Kraft 4 durch die Strecke GD dargestellt wird.

Nachdem 2 zerlegt ist, kann man 1 und 4, die auf dieselbe Grade fallen, zu einer Resultirenden vereinigen, die mit 5 bezeichnet werden mag. Da 1 und 4 entgegengesetzten Pfeil haben, ist 5 gleich der Differenz von beiden und wird durch die Strecke GA dargestellt. Hiermit sind die ursprünglich gegebenen Kräfte 1 und 2 vollständig durch die Kräfte 3 und 5 ersetzt. Die durch die Parallelogramme $ABCD$ und $AEFG$ dargestellten Kräftepaare sind also in der That gleichwerthig mit einander.

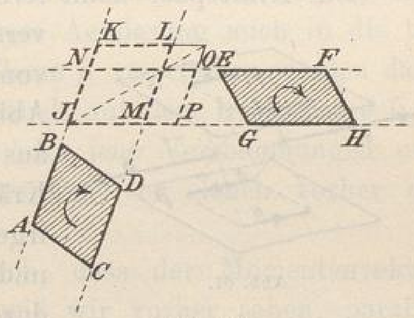

Abb. 60.

Schliesslich lässt sich noch zeigen, dass zwei Kräftepaare, die durch irgend zwei in derselben Ebene liegende Parallelogramme dargestellt werden, falls diese nur gleichen Inhalt haben und zu demselben Umlaufssinne gehören, gleichwerthig mit einander sind. In Abb. 60 seien $ABCD$ und $EFGH$ die inhaltsgleichen Parallelogramme. Man verschiebe zunächst $ABCD$ innerhalb des Parallelstreifens in die Lage $JKLM$; dann forme man um auf $JNOP$. Dieses Parallelogramm lässt sich aber, da es mit $EFGH$ gleichen Inhalt haben soll und mit ihm in demselben Parallelstreifen liegt, durch $EFGH$ ersetzen und hiermit ist in der That nachgewiesen, dass die durch die Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$ dargestellten Kräftepaare gleichwerthig miteinander sind.

Ein Kräftepaar kann daher in seiner Ebene beliebig verschoben und zugleich sonst umgeformt werden, so lange nur das statische Moment weder dem Werthe noch dem Vorzeichen nach geändert wird. Es genügt daher zur Darstellung des Kräftepaars auch, irgendwo in der Ebene eine Normale nach jener Seite hin zu ziehen, von der aus gesehen das Kräftepaar eine Drehung im Uhrzeigersinne hervorzubringen sucht und die Grösse des Moments auf dieser Normalen in irgend einem Maassstabe abzutragen. Dabei ist als besondere Eigenthümlichkeit dieses Momentenvektors, die aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt, hervorzuheben, dass dieser beliebig parallel zu sich verschoben werden darf. In dieser Hinsicht steht er durchaus im Gegensatze zu jener Strecke, durch die man eine Einzelkraft darstellt. Diese darf keineswegs, oder wenigstens nicht ohne einen anderweitigen Ausgleich parallel zu sich verschoben werden, während beim Momentenvektor die Verschiebung ohne Weiteres und ohne jede Compensation zulässig ist.

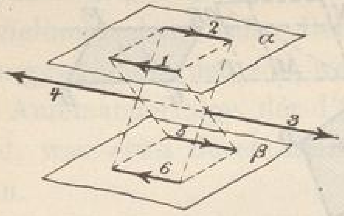

Abb. 61.

Ein Kräftepaar kann ferner auch in eine parallele Ebene verschoben werden. Um sich hiervon zu überzeugen, betrachte man Abb. 61. In der Ebene α sei das aus den Kräften 1 und 2 gebildete Kräftepaar gegeben. Man ziehe irgend eine zu α parallele Ebene β und projicire das Parallelogramm 1, 2 durch rechtwinklige Projektionsstrahlen auf β; die Projektion liefert das Parallelogramm 5, 6. Dann lege man in dem hierbei entstehenden Parallelepiped die Diagonalebenen durch 1 und 5 und durch 2 und 6 und suche deren Schnittlinie auf, die in der Mitte zwischen α und β verläuft. Nach diesen Vorbereitungen bringe man zwei neue Kräfte 3 und 4 an dem Körper an, die sich gegenseitig aufheben und deren Richtungslinien mit der vorher ermittelten Schnittlinie zusammenfallen. Jede dieser beiden Kräfte sei doppelt so gross, als eine der Kräfte 1 oder 2. An Stelle des Kräftepaars 1, 2 tritt jetzt der Verein der vier Kräfte 1, 2, 3, 4. Diese kann man nun in geeigneter Weise zusammenfassen. Wir bilden zunächst die Resultirende aus 1 und 3. Da beide Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind und 3 doppelt so gross ist, als 1, ist die Resultirende gleich gerichtet mit 3 und so gross wie 1 oder 2. Dabei liegt sie ausserhalb des aus den

Richtungslinien von 1 und 3 gebildeten Parallelstreifens nach der Seite der grösseren Kraft hin, in solchem Abstande, dass für einen auf 3 gelegenen Momentenpunkt das Moment der Resultirenden gleich dem Momente von 1 ist. Daraus folgt, dass die Resultirende aus 1 und 3 durch die mit 5 bezeichnete, in der Ebene β enthaltene Strecke dargestellt wird. Ebenso liefern 2 und 4 die durch die Strecke 6 dargestellte Resultirende.

Nach Ausführung dieser Zusammensetzungen sind die Kräfte 1, 2, 3, 4 und daher auch das ursprünglich gegebene Kräftepaar 1, 2 durch das Kräftepaar 5, 6 ersetzt. Das Parallelogramm 5, 6 bildet aber die Projektion des Parallelogramms 1, 2 auf die Ebene β und damit ist bewiesen, dass das Kräftepaar 1, 2 ohne weitere Aenderung auch in die beliebig angenommene parallele Ebene β verschoben werden darf. Nachträglich können natürlich auch mit dem Kräftepaare 5, 6 innerhalb der Ebene β wieder alle jene Verschiebungen und Umformungen vorgenommen werden, von denen vorher die Rede war.

Hieraus folgt zugleich auch, dass der Momentenvektor eines Kräftepaares nicht nur, wie wir vorher sahen, parallel zu sich selbst, sondern zugleich auch längs seiner eigenen Richtungslinie beliebig verschoben werden darf. Man kann daher alles, was bisher von den Kräftepaaren bewiesen wurde, auch dahin zusammenfassen, dass das Kräftepaar durch Angabe des Momentenvektors bereits vollständig beschrieben wird und dass dieser Vektor ein völlig freier Vektor ist, der an jedem beliebig gewählten Punkte angeheftet werden kann. Es kommt bei ihm gar nicht auf die Lage, sondern nur auf seine Grösse und seine Richtung an. Der Vektor, durch den eine Einzelkraft dargestellt wird, kann im Gegensatze zum Momentenvektor nur längs seiner Richtungslinie und nicht parallel dazu verschoben werden; bei ihm kommt es nicht nur auf Richtung und Grösse, sondern auch auf die Lage der Richtungslinie an. Um diesen Unterschied in anschaulicher Sprache hervorzuheben, bezeichnet man die Einzelkraft als einen linienflüchtigen Vektor im Gegensatze zu dem völlig freien Vektor, der ein Kräftepaar darstellt.

Sind zwei Kräftepaare gegeben, die entweder in derselben Ebene oder in zwei parallelen Ebenen liegen, so schiebe man sie zunächst in dieselbe Ebene, stelle jedes durch ein Parallelogramm dar, so dass die Seiten in beiden parallel laufen und die Grundlinien gleich gross sind und lege die Parallelogramme mit einer gemeinsamen Grundlinie nebeneinander oder aufeinander, aber so jedenfalls, dass die gemeinsame Grundlinie im einen Parallelogramme eine Kraft von entgegengesetztem Pfeile wie im anderen Parallelogramme bedeutet. Von den vier Kräften heben sich dann die beiden aufeinander gelegten gegenseitig auf und die beiden anderen bilden ein neues Kräftepaar, das die Resultirende der beiden gegebenen Kräftepaare bildet. Hatten beide Kräftepaare gleichen Drehsinn, so liegen ihre Flächen nebeneinander und das Parallelogramm des resultirenden Kräftepaares ist gleich der Summe aus den Flächen der Parallelogramme der einzelnen Kräftepaare. War der Umlaufssinn entgegengesetzt, so tritt an die Stelle der Summe die Differenz der Flächen.

Man kann diese einfache Betrachtung auch dahin zusammenfassen, dass der Momentenvektor des resultirenden Kräftepaares gleich der geometrischen Summe der Momentenvektoren der gegebenen Kräftepaare ist. Bei gleichem Umlaufssinne sind beide Momentenvektoren gleich gerichtet und ihre geometrische Summe ist gleich der numerischen Summe aus beiden, also gleich der durch einfaches Zusammenzählen der Momentenbeträge gebildeten Summe. Bei entgegengesetztem Umlaufssinne sind die Momentenvektoren entgegengesetzt gerichtet und ihre geometrische Summe wird durch die Differenz der absoluten Beträge angegeben. — Diese Betrachtungen bleiben natürlich auch noch anwendbar, wenn mehr als zwei Kräftepaare in derselben oder in parallelen Ebenen zu einer Resultirenden vereinigt werden sollen.

Um zwei Kräftepaare zusammenzusetzen, die in verschiedenen Ebenen liegen, kann man sich des durch Abb. 62

dargestellten Verfahrens bedienen. Das Kräftepaar in der Ebene α sei durch das Parallelogramm 1, 2 zur Darstellung gebracht, von dem die Grundlinie 2 mit der Schnittlinie $\alpha\beta$ beider Ebenen zusammenfällt. Auf gleiche Art führe man auch das in der Ebene β liegende Kräftepaar auf ein Parallelogramm 3, 4 zurück, von dem eine Seite 3 in die Schnittlinie $\alpha\beta$ fällt. Wir können es dabei so einrichten, dass beide Parallelogramme gleiche Grundlinien haben und dass sie mit einer gemeinschaftlichen Seite in der Schnittlinie $\alpha\beta$ aneinander grenzen. Ferner sollen auch beide so aneinander geschoben sein, dass die gemeinschaftliche Seite in beiden Parallelogrammen Kräfte von entgegengesetztem Pfeile darstellt. Dies lässt sich immer leicht erreichen; denn sollten etwa 2 und 3 nicht, wie in Abb. 62 angenommen ist, von entgegengesetztem, sondern von gleichem Pfeile sein, so brauchte man nur die Ebene β über die Schnittlinie $\alpha\beta$ hinaus zu verlängern und das Parallelogramm 3, 4 in die Verlängerung zu schieben, so dass nachher 4 sich mit 2 deckte. Diese wären dann von entgegengesetztem Pfeile und die Figur würde sich von Abb. 62 nur dadurch unterscheiden, dass das, was jetzt in einem der zwischen den Ebenen α und β gebildeten Keile gezeichnet ist, sich nachher in dem Nebenkeile abspielte.

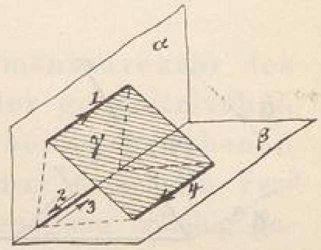

Abb. 62.

Die zum Zusammenfallen gebrachten Kräfte 2 und 3 heben sich gegenseitig auf und es bleiben nur noch die Kräfte 1 und 4 übrig, die ein Kräftepaar mit einander bilden, das die Resultirende aus den Kräftepaaren 1, 2 und 3, 4 ausmacht. Das resultirende Kräftepaar liegt in einer neuen Ebene γ, die von α und β verschieden ist; es wird durch das durch Schraffirung hervorgehobene Parallelogramm dargestellt. Nachträglich kann man natürlich das Parallelogramm in der Ebene γ wieder beliebig umformen oder es auch in eine zu γ parallele Ebene verschieben, wenn man nur darauf achtet, dass der Momentenvektor dabei nach Grösse und Richtung unverändert bleibt.

Um den Zusammenhang zu erkennen, der zwischen den Momentenvektoren der drei Kräftepaare besteht, fertigen wir in Abb. 63 eine neue Zeichnung an, die als rechtwinklige Projektion auf eine zur Schnittlinie $\alpha\beta$ senkrechte Ebene zu betrachten ist. Die drei Parallelogramme projiciren sich als Abschnitte auf den Spuren der Ebenen α, β, γ. Da die drei Parallelogramme gleiche Grundlinien hatten, verhalten sich ihre Flächen oder die von ihnen dargestellten Momente wie die Seiten des von den Spuren α, β, γ gebildeten Dreiecks.

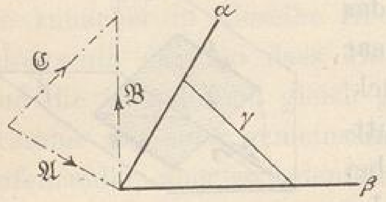

Abb. 63.

Die Momentenvektoren der drei Kräftepaare seien mit 𝔄, 𝔅, ℭ bezeichnet; sie liegen in der Ebene der Abb. 63 und können in dieser ohne Weiteres aufgetragen werden. Der Momentenvektor 𝔅 des Kräftepaares in der Ebene β steht rechtwinklig zu β und ist, wie aus dem Vergleiche mit Abb. 62 ohne Weiteres folgt, mit dem Pfeile senkrecht nach oben gerichtet. Der Maassstab, in dem die Momentenvektoren aufgetragen werden sollen, kann nach Belieben gewählt werden. Da wir schon wissen, dass sich die Momente jedenfalls wie die Seiten des Dreiecks α, β, γ verhalten, ist es am einfachsten, die Strecke 𝔅 gleich der auf β liegenden Dreieckseite zu machen.. Auch 𝔄 und ℭ sind dann gleich den Abschnitten auf α und γ zu setzen. Der Momentenvektor 𝔄 des in der Ebene α liegenden Kräftepaares hat, wie aus Abb. 62 hervorgeht, einen dort dem Beschauer zugewendeten Pfeil. Hiernach ist auch der Pfeil von 𝔄 in Abb. 63 gewählt und zwar ist die Strecke so angetragen, dass die Pfeile von 𝔄 und 𝔅 aufeinander folgen. Nachdem 𝔄 und 𝔅 aufgetragen sind, verbinde man ihre Endpunkte miteinander. Man erhält dann ein Dreieck, das mit dem Dreiecke α, β, γ kongruent ist, da es mit ihm in zwei Seiten und dem dazwischen liegenden Winkel übereinstimmt. Hieraus folgt, dass auch die dritte Seite gleich lang mit dem Abschnitte auf γ ist und dass beide ebenso wie die anderen einander entsprechenden Seiten rechtwinklig zueinander stehen. Die dritte Seite gibt daher den Momentenvektor $\mathfrak{C}$ an. Der Pfeil von $\mathfrak{C}$ folgt wieder aus dem Vergleiche mit der Uebersichtszeichnung in Abb. 62.

Hiermit ist bewiesen, dass der Momentenvektor des resultirenden Kräftepaares gleich der geometrischen Summe der Momentenvektoren der beiden gegebenen Kräftepaare ist. Wir sind damit zu dem einfachsten Verfahren gelangt, dessen man sich zur Vereinigung beliebig gegebener Kräftepaare bedienen kann. Man stellt alle gegebenen Kräftepaare durch ihre Momentenvektoren dar und bildet aus diesen die geometrische Summe. Der resultirende Vektor gibt ohne Weiteres das resultirende Kräftepaar an. Zugleich erkennt man, dass sich beliebig gegebene Kräftepaare stets durch ein einziges Kräftepaar ersetzen lassen. Ist die geometrische Summe der Momentenvektoren gleich Null, so stehen die Kräftepaare im Gleichgewichte miteinander.

Ich bemerke schliesslich noch, dass man durch analytische Beweisführung auf Grund des Momentensatzes die vorhergehenden Betrachtungen freilich erheblich abkürzen kann; ich halte es aber für nützlicher, diese Untersuchung mit den einfachsten Hülfsmitteln, deren man sich beim Zusammensetzen von Kräften bedienen kann, folgerecht, wenn auch vielleicht etwas weitschweifig, durchzuführen. Man wird dadurch mit dem Gegenstande genauer vertraut, als wenn man sich damit begnügt, die letzten Folgerungen, zu denen wir gelangten, als Behauptungen aufzustellen, die mit Hülfe des Momentensatzes bewiesen werden.

§ 23. Gleichwerthigkeit von Kraftkreuzen.

Wir kehren jetzt zu den Untersuchungen in § 21 zurück. Um ein beliebig gegebenes Kräftesystem auf ein Kraftkreuz zurückzuführen, wählten wir einen Punkt A und eine Ebene ε beliebig aus und zerlegten dann alle Kräfte so, dass eine Componente durch A ging, während die andere in ε lag. Dadurch