



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Veränderliche Trägheitsmomente

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

findet man leicht die Stelle der grössten Durchbiegung y_{\max} des Trägers heraus. In dem Beispiele ergibt sich diese auf der Zeichnung zu 15 mm; wegen des vorher besprochenen Maassstabes bedeutet dies aber in Wirklichkeit eine Durchbiegung von 30 mm. — Der nach rechts vom rechten Auflager aus vorkragende Theil des Trägers hebt sich, wie aus der Zeichnung zu erkennen ist, nach oben hin auf und ist mit der Hohlseite nach unten hin gekrümmt, wie es den negativen Biegemomenten entspricht. Auf der durch den Schnittpunkt des ersten Seilpolygons mit seiner Schlusslinie gezogenen Vertikalen liegt der Wendepunkt der elastischen Linie.

Bisher war angenommen, dass das Trägheitsmoment Θ constant sei. Die Construction wird aber nicht wesentlich geändert, wenn Θ in beliebiger, aber gegebener Weise veränderlich ist. Man muss dann nur, um die Uebereinstimmung der Differentialgleichung für die elastische Linie mit der Gleichung der Seilcurve herzustellen, dafür sorgen, dass nun q nicht mehr mit M , sondern mit $\frac{M}{\Theta}$ überall proportional ist. Man wähle irgend einen Querschnitt des Trägers, etwa den in der Mitte aus, um dessen Trägheitsmoment Θ_m mit dem Trägheitsmomente Θ an irgend einer anderen Stelle zu vergleichen. Dann forme man die Momentenfläche so um, dass ihre Ordinaten u überall durch

$$u = \frac{\Theta_m}{\Theta}$$

ersetzt werden. Da Θ überall gegeben sein sollte, ist dies leicht auszuführen. Die so umgeformte Fläche ist dann als Belastungsfläche des zweiten Seilpolygons anzunehmen, dessen Horizontalzug H_{II} nun an Stelle von Gl. (27)

$$H_{II} = \frac{E \Theta_m}{H_I} \quad (29)$$

zu wählen ist. — Gerade hierin, dass ein beliebig veränderliches Trägheitsmoment dem graphischen Verfahren gar keine besonderen Schwierigkeiten macht, liegt gegenüber dem ana-

lytischen Verfahren, das in der unmittelbaren Integration der Differentialgleichung besteht, ein grosser Vorzug.

Unter manchen Umständen kann auch noch ein anderes Verfahren am Platze sein, das in Abb. 46 zur Ausführung gebracht wurde. Ist das Trägheitsmoment des Trägers nämlich absatzweise constant, so kann man die elastische Linie zu

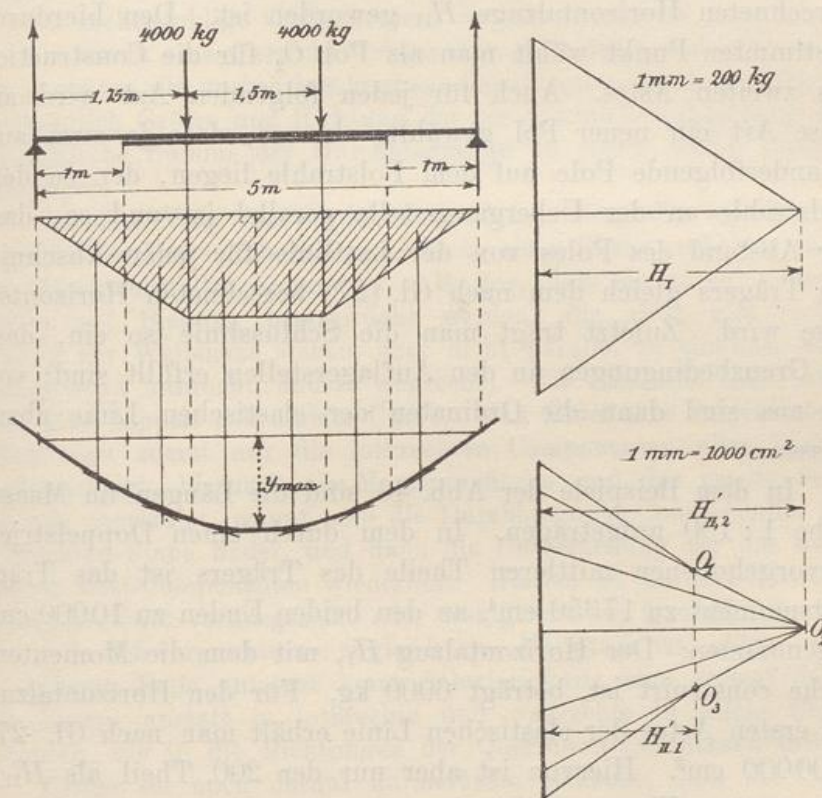


Abb. 46.

jedem Abschnitte von gleichem Trägheitsmomente genau wie in Abb. 45 konstruieren. Zu jedem anderen Abschnitte gehört ein anderer Ast der elastischen Linie, der zwar ebenfalls als Seilcurve, aber unter Anwendung eines anderen Horizontalzuges konstruiert werden kann. Die elastische Linie setzt sich dann aus der Aneinanderreihung aller dieser Seilcurvenstücke zusammen, die sich ohne Knick aneinanderschliessen und die

Grenzbedingungen an den Auflagerstellen erfüllen müssen. Man beginnt mit der Construction etwa am linken Ende, indem man den Pol O_1 im Kräfteplane beliebig wählt. An der Uebergangsstelle zum nächsten Aste muss der Seilstrahl eine gemeinsame Tangente an beide Aeste bilden. Im Kräfteplane verlängert (oder verkürzt) man daher den zugehörigen Polstrahl so lange, bis der Polabstand gleich dem für den zweiten Ast nach Gl. (27) berechneten Horizontalzuge H_{II} geworden ist. Den hierdurch bestimmten Punkt wählt man als Pol O_2 für die Construction des zweiten Astes. Auch für jeden folgenden Ast wird auf diese Art ein neuer Pol gewählt; also so, dass je zwei aufeinanderfolgende Pole auf dem Polstrahle liegen, der zu dem Seilstrahle an der Uebergangsstelle parallel ist und so, dass der Abstand des Poles von der Lastlinie für jeden Abschnitt des Trägers gleich dem nach Gl. (27) berechneten Horizontalzuge wird. Zuletzt trägt man die Schlusslinie so ein, dass die Grenzbedingungen an den Auflagerstellen erfüllt sind; von ihr aus sind dann die Ordinaten der elastischen Linie abzumessen.

In dem Beispiele der Abb. 46 sind die Längen im Maassstabe 1 : 100 aufgetragen. In dem durch einen Doppelstrich hervorgehobenen mittleren Theile des Trägers ist das Trägheitsmoment zu 17350 cm^4 , an den beiden Enden zu 10000 cm^4 angenommen. Der Horizontalzug H_I , mit dem die Momentenfläche construiert ist, beträgt 6000 kg . Für den Horizontalzug des ersten Astes der elastischen Linie erhält man nach Gl. (27) 3500000 cm^2 . Hiervon ist aber nur der 200. Theil als $H_{II,1}$ genommen. Ebenso findet man

$$H'_{II,2} = \frac{1}{200} \cdot \frac{2100000 \cdot 17350}{6000} = 30362 \text{ cm}^2,$$

die durch $30,4 \text{ mm}$ im Kräfteplane des zweiten Seilpolygons dargestellt werden; als Elasticitätsmodul ist dabei wieder $E = 2100000 \text{ atm}$ angenommen. Die elastische Linie erscheint in 200facher Verzerrung. Da aber zugleich alle Längen 100fach verkleinert sind, werden die Ordinaten der elastischen Linie in doppelter Grösse aus der Zeichnung entnommen. Die grösste

Durchbiegung y_{\max} findet hier in der Mitte statt; die Zeichnung liefert dafür 11 mm, in Wirklichkeit beträgt daher der Biegunspfeil 5,5 mm.

Schliesslich mögen noch einige Bemerkungen Platz finden, die zwar weniger wichtig sind, aber doch gelegentlich von Nutzen sein können. Geht nämlich zunächst die Belastungsebene nicht durch eine Querschnittshauptaxe des Trägers (vgl. hierzu die einschlägigen Lehren des dritten Bandes), so zerlegt man die Biegunsmomente in zwei rechtwinklige Componenten, so dass die Ebene jeder Componente durch eine Querschnittshauptaxe geht, führt dann für beide Componenten die vorher beschriebene Construction durch und findet nachträglich Grösse und Richtung der gesammten Durchbiegung als geometrische Summe der Durchbiegungen in jenen beiden Hauptrichtungen.

Derselbe Weg führt auch zum Ziele, wenn die am Balken angreifenden Lasten überhaupt nicht in einer Ebene enthalten sind. Bei Maschinenwellen kommt es z. B. vor, dass sie durch mehrere Kräfte auf Biegung beansprucht werden, die zwar alle rechtwinklig zur Wellenaxe stehen, aber nicht parallel zu einander sind (einige etwa lothrecht, andere wagrecht). Die elastische Linie wird dann eine doppelt gekrümmte Curve. Man findet ihre Projektionen, indem man zuerst nur die lothrechten Componenten aller Lasten berücksichtigt, hiernach die Momentenfläche und das zweite Seilpolygon construirt, womit man die Durchbiegungs-Componenten im lothrechten Sinne findet, und dann die Untersuchung für die wagrechten Last-Componenten wiederholt. Hierbei ist ein kreisförmiger Stabquerschnitt vorausgesetzt oder wenigstens ein Querschnitt, von dem jede Schwerpunktsaxe zugleich eine Hauptaxe ist. Aber auch im anderen Falle entsteht keine Schwierigkeit; man zerlegt dann alle Lasten anstatt in lothrechte und wagrechte in solche Componenten, die in die Richtungen der Querschnittshauptaxen fallen.

Ferner sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass die Construction einer Seilcurve ganz allgemein die Ermittlung des Doppelintegrals

$$\iint q \, dx \, dx$$

auf graphischem Wege gestattet, wenn darin q eine beliebige gegebene Function von x bedeutet, die als Ordinate der Belastungsfläche graphisch dargestellt werden kann. Die Ermittlung der elastischen Linie bildet nur ein Beispiel (freilich das technisch wichtigste) für die Ausführung einer solchen mechanischen Integration.