Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Verfahren von Mohr

Seileckseiten zu verbinden haben, um die Schlusslinie und hiermit die Momentenfläche für diese Oeffnung zu erhalten. Denkt man sich diese Linie in die Abbildung eingetragen, so erkennt man sofort, dass die Momentenfläche dann viel grösser ausfällt, als vorher. Von der Grösse der Momente hängt aber die Biegungsbeanspruchung des Balkens ab. Der Kragträger wird demnach durch die gegebenen Lasten weniger stark beansprucht, als wenn jede Oeffnung für sich überdeckt wäre und in diesem Umstande ist der Vortheil begründet, der sich durch die Gerber'sche Anordnung erzielen lässt.

§ 18. Die graphische Ermittelung von Trägheitsmomenten.

Betrachtet man irgend eine gerad- oder krummlinig begrenzte Figur als Belastungsfläche einer Seilcurve, so gibt die zwischen der Seilcurve und ihrer Anfangstangente eingeschlossene Momentenfläche zugleich das statische Moment des links davon liegenden Theiles der Figur für eine Axe $\sigma\sigma$ an. Zieht man auch noch die Tangente am anderen Ende, so sind die zwischen ihr und der Seilcurve auf $\sigma\sigma$ abgeschnittenen Strecken zugleich den statischen Momenten der rechts von $\sigma\sigma$ liegenden Flächentheile proportional. Die in den vorigen Paragraphen besprochene Anwendung des Seilpolygons liefert daher zugleich die Momente ersten Grades von Querschnittsflächen in Bezug auf alle in der Querschnittsebene parallel zur gewählten Kraftrichtung gezogenen Axen.

Aber auch Momente zweiten Grades können mit Hülfe des Seilpolygons gefunden werden. Zur Bestimmung des Trägheitsmoments eines Schienenprofils oder einer anderen theils gerad-, theils krummlinig begrenzten Querschnittsfläche bildet dieses Verfahren sogar das bequemste und empfehlenswertheste Hülfsmittel. Zur Begründung des Verfahrens diene Abb. 42. Die Belastungsfläche ist hier genau der in Abb. 34 (S. 77) nachgebildet und die Seilcurve, deren Construction dort erläutert wurde, ist hier ebenfalls von dort übernommen. Nur die Eintheilung in die Belastungsstreifen und das den Einzellasten entsprechende, aus Tangenten der Seilcurve bestehende Seilpolygon ist in der neuen Figur weggelassen, weil diese Linien zwar zur Construction der Seilcurve nöthig sind, nachher aber nicht mehr gebraucht und daher fortgelöscht werden können. Verlängert man die äussersten Seileckseiten, also die Endtangenten der Seilcurve, bis sie sich schneiden, so geht durch diesen Punkt die Resultirende der das Seil belastenden Gewichte, d. h. die Linie SS ist die Schwerlinie der Belastungsfläche.

Man betrachte ferner einen unendlich schmal zu denkenden Streifen dF der Belastungsfläche im Abstande y von SS.

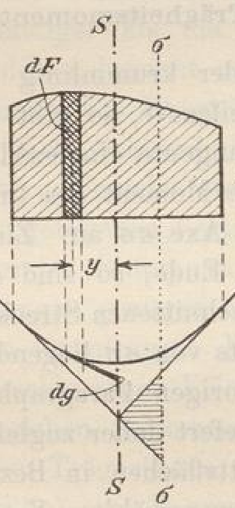

Abb. 42a.

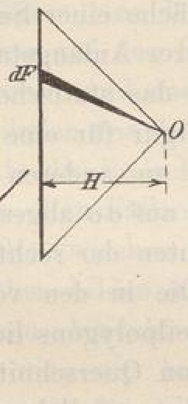

Abb. 42b.

Verlängert man die Grenzlinien des Streifens bis zur Seilcurve und zieht an beiden Punkten der Seilcurve Tangenten, so schliessen diese mit SS das in der Abbildung schwarz hervorgehobene, schmale Dreieck ein. Die auf SS liegende Grundlinie des Dreiecks sei mit dg bezeichnet. Der gegenüberliegende Endpunkt, also der Schnittpunkt beider Tangenten liegt auf der Schwerlinie des Streifens dF. Die zu dg gehörige Höhe des Dreiecks ist daher gleich y und der Inhalt des Dreiecks gleich $\frac{1}{2} dg \cdot y$.

Im Kräfteplane Abb. 42[b] kann man durch Ziehen von Parallelen zu den beiden Tangenten ein ebenfalls schwarz hervorgehobenes Dreieck abgrenzen, das dem in Abb. 42[a] ähnlich ist, weil die Seiten parallel zu einander gehen. Man hat daher die Proportion

$$\frac{dF}{H} = \frac{dg}{y} \quad \text{oder} \quad H dg = y dF.$$

Denkt man sich diese Gleichung für alle links von SS liegenden Streifen angeschrieben und alle summirt, so erhält man das Moment ersten Grades des links von SS liegenden Flächentheiles gleich dem Produkte aus dem Horizontalzuge H und der Summe aller dg, d. h. dem Abschnitte zwischen Seilcurve und Anfangstangente. Damit gelangen wir nur wieder auf anderem Wege zu den bereits früher gezogenen Schlüssen zurück.

Um auf die Momente zweiten Grades zu kommen, multiplicire man die vorige Gleichung mit y. Damit erhält man

$$y^2 dF = H y dg \quad \text{und daher} \quad \int y^2 dF = H \int y dg.$$

Die Summirung auf der rechten Seite kann aber unmittelbar ausgeführt werden. Denn das Integral gibt das Doppelte aus der Summe aller jener Dreiecke an, von denen vorher eines besprochen wurde. Diese Dreiecke folgen alle stetig aufeinander und füllen den zwischen der Seilcurve, der Anfangstangente und der Linie SS liegenden Raum aus. Dabei ist übrigens gar nicht einmal nöthig, dass SS die Schwerlinie ist; auch für irgend eine andere, parallel zu SS gezogene Linie $\sigma\sigma$ bleibt die Betrachtung anwendbar und die zwischen ihr, der Curve und der Anfangstangente abgegrenzte Fläche gibt nach Multiplikation mit $2H$ das Moment zweiten Grades für $\sigma\sigma$ von dem links davon liegenden Theile der Belastungsfläche an.

Um das Moment für die ganze Belastungsfläche zu erhalten, braucht man nur das Moment für die rechte Hälfte hinzuzufügen. Für dieses gilt natürlich dieselbe Betrachtung; es kann auch gleich dem Produkte aus $2H$ und dem zwischen der Seilcurve, der Endtangente und der Linie SS oder $\sigma\sigma$ liegenden Flächenstücke gesetzt werden. Dabei ist zu beachten, dass jedes Flächenelement der Belastungsfläche nur positive Beiträge zum Trägheitsmomente liefern kann; die von links und rechts her stammenden Beiträge sind daher ohne Vorzeichenunterschied zusammenzuzählen.

Ein Blick auf Abb. 42[a] lehrt, dass das Trägheitsmoment unter allen parallel zu einander gezogenen Axen für die Schwerlinie SS am kleinsten ausfällt. Es ist nämlich gleich dem Produkte aus $2H$ und der zwischen der Seilcurve und ihren beiden Endtangenten eingeschlossenen Fläche. Für eine Axe $\sigma\sigma$ vergrössert sich dagegen diese Fläche um das zwischen $\sigma\sigma$ und den beiden Endtangenten abgeschnittene Dreieck, das in Abb. 42[a] durch eine horizontale Schraffirung ausgezeichnet ist.

Der Horizontalzug H der Seilcurve hat die Bedeutung eines Flächeninhaltes. Als Lasten dienten nämlich die Flächeninhalte der Belastungsstreifen und mit diesen muss H von gleicher Art sein. Am besten wählt man H im Kräfteplane so, dass es die Hälfte der Belastungsfläche F darstellt. Dies wird sofort erreicht, wenn man die beiden äussersten Polstrahlen in Richtungen von 45^0 zieht. Dann bildet nämlich H die Höhe eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Summe aller dF, also F selbst angibt. Bezeichnet man ferner die zwischen der Seilcurve und ihren beiden Endtangenten liegende Fläche mit F' und das Trägheitsmoment für die Schwerlinie SS mit Θ, so hat man, unter der Voraussetzung, dass H in der eben angegebenen Weise gewählt wurde,

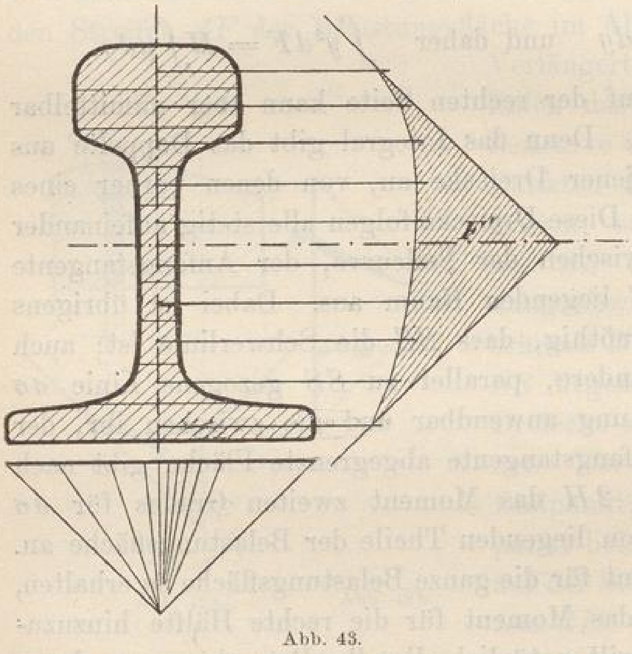

Abb. 43.

$$\Theta = F \cdot F'. \tag{20}$$

Die Inhalte der Flächen F und F' ermittelt man am besten mit Hülfe eines Planimeters.

In Abb. 43 ist das Verfahren auf ein Schienenprofil angewendet. — Um die Central-Ellipse oder den Querschnittskern einer Querschnittsfläche zu erhalten, muss man dasselbe Verfahren für die beiden Hauptaxen wiederholen.

Ausser dem bisher besprochenen Verfahren, das von Mohr herrührt, ist noch eine andere graphische Methode zur Bestimmung von Trägheitsmomenten zu erwähnen, die von Nehls angegeben ist. Freilich hat diese mit dem Seilpolygone nichts zu schaffen; sie soll aber an dieser Stelle ebenfalls besprochen werden. Die Nehls'sche Methode beruht auf einer einfachen Umformung des für das Trägheitsmoment aufgestellten Summenausdrucks, nämlich

$$\Theta = \int y^2 dF = a^2 \int \left(\frac{y}{a}\right)^2 dF.$$

Man formt jeden Flächenstreifen dF so um, dass er in $\left(\frac{y}{a}\right)^2 dF$ übergeht, und erhält dann Θ als Produkt aus der Summe dieser umgeformten Flächenstreifen und aus a^2.

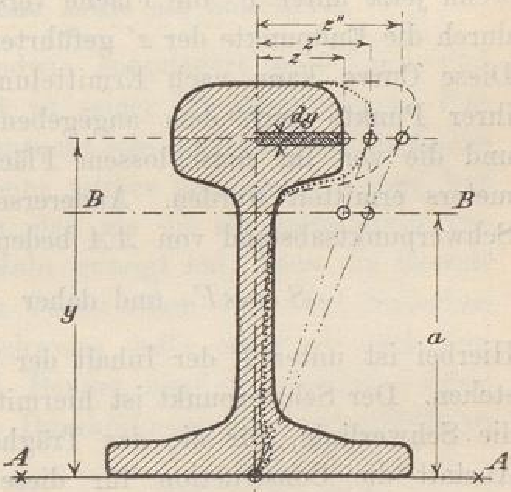

Abb. 44.

Gewöhnlich wird bei der Anwendung des Verfahrens der Schwerpunkt der Querschnittsfläche noch nicht bekannt sein. Man zieht dann irgendwo eine Parallele AA zur Schwerlinie, für die das Trägheitsmoment gesucht wird und bestimmt sowohl das statische Moment als das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche für diese Parallele als Axe. Bei einem Schienenprofile, das in Abb. 44 wiederum als Beispiel gewählt wurde, kann man etwa die Basislinie dazu benutzen. Dann zieht man in einem Abstande a, der beliebig angenommen werden kann,