Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Parabel als Seilcurve

$$Hd\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\,q\,dx$$

oder nach Division mit dx

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -\,q. \tag{2}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Seilcurve. Wenn q analytisch als Function von x gegeben ist, findet man daraus die endliche Gleichung der Seilcurve durch zweimalige Integration. Hierbei treten zwei willkürliche Integrations-Constanten auf. Da auch der Horizontalzug H des Seilpolygons willkürlich gewählt werden kann, enthält die allgemeine Gleichung der Seilcurve drei willkürliche Constanten. Dies entspricht dem Umstande, dass zu einer gegebenen Belastungsfläche beliebig viele Seilcurven gezeichnet werden können. Um eine unter ihnen näher zu kennzeichnen, müssen noch besondere Bedingungen hinzutreten, die zur Ermittelung der Integrations-Constanten und des Horizontalzuges H ausreichen.

Für den besonders häufig vorkommenden Fall einer gleichförmigen Lastvertheilung soll die Rechnung sofort weiter durchgeführt werden. Wenn q constant ist, erhält man aus Gl. (2) durch zweimalige Integration

$$\left.\begin{aligned} H\frac{dy}{dx} &= -\,qx + C_1. \\ Hy &= -\,q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2, \end{aligned}\right| \tag{3}$$

wenn die Integrations-Constanten mit C_1 und C_2 bezeichnet werden. Die Seilcurve bildet demnach eine Parabel.

Seile, Ketten oder dünne Drähte, deren Biegungswiderstand vernachlässigt werden kann und die eine der horizontalen Richtung nach wenigstens annähernd gleichförmig vertheilte Belastung zu tragen haben, kommen bei Ketten- oder Kabel-Brücken, bei Telegraphenleitungen und bei Drahtseilbahnen vor. Ein Telegraphendraht z. B., der zwischen zwei weit von einander entfernten Stützen ausgespannt ist, hat seine Eigenlast, zuzüglich einer im Winter bei Rauchfrost oder Schneefall ihm anhaftenden Eislast zu tragen, die als der ganzen Länge nach gleichförmig vertheilt angenommen werden kann. Freilich ist die Eigenlast streng genommen der Bogenlänge und nicht der Abscisse x proportional. Wenn der Draht, wie es gewöhnlich zutrifft, ziemlich flach gespannt ist, ist der Unterschied aber geringfügig und er kommt um so weniger in Betracht, als die Schneebelastung, die unter Umständen erheblich mehr ausmachen kann, als das Eigengewicht, eher proportional mit x als mit der Bogenlänge angenommen werden kann. Der Biegungswiderstand des Drahtes kommt in solchen Fällen gar nicht in Betracht; der Draht kann vielmehr bei den grossen Krümmungshalbmessern, um die es sich dabei handelt, als ein absolut biegsames Seil angesehen werden.

In Abb. 36, die sich auf einen solchen Fall bezieht, sind A und B die beiden Stützen, zwischen denen der Draht ausgespannt ist. Dabei ist angenommen, dass beide gleich hoch liegen. Der Ursprung des Coordinatensystems ist auf die linke Stütze A und die X-Axe in die Verbindungslinie AB gelegt.

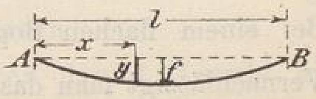

Abb. 36.

An beiden Stützen gilt die Grenzbedingung, dass y zu Null werden muss. Hieraus folgen die Werthe der Integrationsconstanten C_1 und C_2 in Gl. (3); C_2 muss zu Null werden und C_1 folgt aus

$$0 = -\frac{ql^2}{2} + C_1 l \quad \text{zu} \quad C_1 = \frac{ql}{2}.$$

Die Parabelgleichung geht damit über in

$$Hy = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}. \tag{4}$$

Den Pfeil f der Seilcurve in der Mitte findet man hieraus zu

$$f = \frac{ql^2}{8H} = \frac{Ql}{8H}, \tag{5}$$

wobei in der letzten Form unter Q die Gesammtbelastung ql des Seiles oder Drahtes zu verstehen ist. Umgekehrt hat man auch

$$H = \frac{Ql}{8f} \tag{6}$$

und damit ist der Horizontalzug der Seilcurve bekannt für den Fall, dass die Durchhängung f des Seiles gegeben ist.

So wird die Aufgabe gewöhnlich gestellt. Es kann aber auch vorkommen, dass zur Ermittelung von H nicht f, sondern die Länge des Seiles, das zwischen den Punkten A und B aufgehängt werden soll, gegeben ist. Dafür ist die Aufstellung einer Gleichung zwischen f und der Bogenlänge der Parabel erforderlich, also die Lösung einer rein geometrischen Aufgabe. Von dieser kann hier abgesehen werden; dagegen soll eine Näherungsformel, von der man bei flachen Parabelbögen mit Vortheil Gebrauch machen kann, abgeleitet werden.

Versteht man unter ds die Länge eines Bogenelementes, so hat man

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Bei einem flachen Bogen ist $\frac{dy}{dx}$ überall ein kleiner Bruch. Vernachlässigt man das Quadrat davon ganz gegen die Einheit, so kann in erster Annäherung $ds = dx$ und die ganze Bogenlänge gleich der Entfernung l der beiden Stützen gesetzt werden. Diese Annäherung genügt aber bei manchen Aufgaben nicht, nämlich immer dann nicht, wenn es sich gerade um den Unterschied der Bogenlänge b von l handelt. Man erhält dann eine bis auf kleine Grössen höherer Ordnung genaue Annäherung, wenn man die Wurzel nach dem binomischen Satze entwickelt und sich auf die Beibehaltung der beiden ersten Glieder beschränkt. Man setze also

$$ds = dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right).$$

Führt man hier den Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus der Parabelgleichung ein und integrirt von 0 bis l, so erhält man

$$b = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{H^2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2\right] dx.$$

Die Integration kann leicht bewerkstelligt werden und liefert

$$b = l + \frac{q^2 l^3}{24\, H^2}. \tag{7}$$

Schliesslich kann auch noch der Werth von H aus Gl. (5) oder Gl. (6) eingesetzt werden, womit die vorige Gleichung übergeht in

$$b = l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l}. \tag{8}$$

Von diesen Näherungsformeln kann man z. B. mit Vortheil Gebrauch machen, um den Einfluss, den eine Temperaturänderung des Drahtes auf f und damit auch auf H ausübt, zu berechnen. Hierbei kann es (bei sehr flachen Bögen) auch nöthig werden, die elastische Verlängerung des Drahtes unter dem Einflusse des Horizontalzuges H in Berücksichtigung zu ziehen. Alle Aufgaben dieser Art können mit Hülfe der Formeln (5), (6) und (7), nöthigenfalls unter Heranziehung des Elasticitätsgesetzes, leicht gelöst werden.

Auch auf den Fall, dass die Stützen A und B nicht in gleicher Höhe liegen, lässt sich die Betrachtung leicht übertragen. Man hat dann C_1 der geänderten Grenzbedingung entsprechend zu wählen. — Trägt das Seil ferner ausser einer gleichförmig vertheilten stetigen Belastung noch eine oder mehrere Einzellasten, wie es z. B. bei den Tragseilen von Drahtseilbahnen vorkommt, so zerfällt die Seilcurve in mehrere Parabelbögen, die sich an den Angriffsstellen der Einzellasten mit einem Knicke aneinander schliessen. Der Sprung in dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ an einer solchen Stelle ist gleich der Einzellast, getheilt durch den Horizontalzug. Dies liefert eine Grenzbedingung an der Uebergangsstelle; die zweite besteht darin, dass y für beide Bögen an dieser Stelle denselben Werth haben muss. Diese Grenzbedingungen, verbunden mit jenen, die an den beiden Aufhängepunkten bestehen, genügen, um alle Integrationsconstanten für die Parabelbogenabschnitte zu berechnen. Die ausführliche Durchrechnung würde hier zuviel Raum in Anspruch nehmen.