Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 20. Ermittelung von Flächeninhalten mit Hülfe des Seilpolygons

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

Man könnte natürlich zu dem zweiten Seilpolygone bei den vorhergehenden Betrachtungen auch noch ein drittes u. s. f. construiren, das aus dem vorigen ebenso abzuleiten wäre, wie das zweite aus dem ersten. Damit würde man auch noch das vierte, sechste Integral u. s. f. von q ableiten können.

§ 20. Ermittelung von Flächeninhalten mit Hülfe des Seilpolygons.

Flächeninhalte ermittelt man am besten mit Hülfe eines Planimeters oder, wenn ein solches nicht zu Gebote steht, durch Zerlegen der Figur in einfachere Theile, deren Inhalte auf Grund geometrischer Sätze sofort berechnet werden können. So gelangt man z. B. auf jeden Fall zu einem hinreichend genauen Resultate, indem man die Figur in schmale Streifen zerlegt, die sich als Trapeze ansehen lassen, den Inhalt für jeden Streifen berechnet und alle addirt oder anstatt dessen durch Anwendung der Simpson'schen Regel.

Aus diesem Grunde ist die Anwendung des Seilpolygons zur Berechnung von Flächeninhalten, die hier noch besprochen werden soll, von geringerer Bedeutung. Man macht indessen immerhin zuweilen davon Gebrauch und sie soll daher hier nicht übergangen werden.

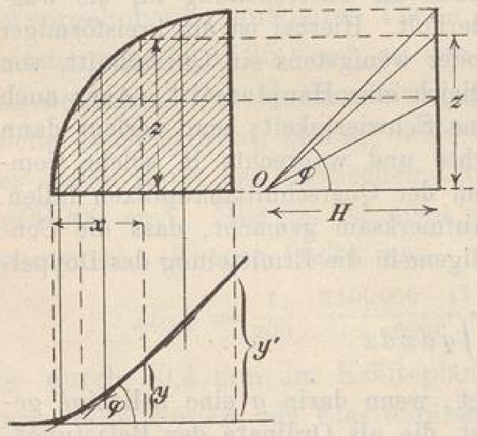

Abb. 47.

Das Verfahren ist durch Abb. 47, in der es auf die Ermittelung des Inhaltes eines Kreisquadranten angewendet wurde, erläutert. In Wirklichkeit würde man es natürlich bei so einfachen Fällen nicht gebrauchen; man wird aber sehen, dass es in derselben Form auch zum Ziele führt, wenn der Kreisbogen durch irgend eine andere Curve ersetzt wird.

Man theilt den Umfang der Grenz-Curve (also hier den Kreisbogen) in eine Anzahl von gleichen oder auch ungleichen Theilen. Eigentlich sollte diese Anzahl unendlich gross sein; in der Abbildung sind aber nur drei Theile genommen, und wenn dies auch etwas wenig ist, so genügt es doch fast schon zur Erzielung einer genügenden Genauigkeit. In der Mitte jedes Bogenelementes bringt man eine in lothrechter Richtung gehende Kraft an, die der Projektion des Elementes auf die lothrechte Richtung proportional ist. Diese Kräfte setzt man mit Hülfe eines Seilpolygons zusammen. Der zugehörige Kräfteplan kann nebenan leicht aufgetragen werden, indem man durch die Theilpunkte auf der Curve Horizontalen zieht, die auf der lothrechten Lastlinie die Lasten in der gewünschten Grösse ohne Weiteres abschneiden. Den Pol O wählt man auf der X-Axe; der Horizontalzug H kann beliebig angenommen werden. Nachdem hierauf das Seilpolygon zu den Lasten unterhalb construirt ist, kann man auch noch die Seilcurve freihändig eintragen, da man weiss, dass diese die Polygonseiten auf den durch die Theilpunkte der Begrenzungscurve der gegebenen Fläche gezogenen Lothrechten berührt. Man kann nun leicht beweisen, dass die Ordinate y der Seilcurve, von der horizontalen ersten Seilspannung aus gemessen, mit dem Horizontalzuge H multiplicirt den bis zur zugehörigen Abscisse x reichenden Theil der gegebenen Fläche angibt.

Zu diesem Zwecke denke man sich im Punkte xy der Seilcurve eine Tangente construirt, die den Winkel φ mit der Horizontalen bilden möge. Diesen Winkel bildet auch der zur Tangente parallel gezogene Polstrahl im Kräfteplane mit der Horizontalen. Bezeichnet man die Ordinate der Grenzcurve der gegebenen Fläche mit z, so hat man für $\operatorname{tg}\varphi$ die beiden Werthe

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{z}{H}.$$

Hieraus folgt

$$H\,dy = z\,dx$$

und daher nach Summirung von 0 bis x

$$Hy = \int_0^x z\,dx. \tag{30}$$

Das Integral gibt aber in der That den bis zur Abscisse x reichenden Theil des Flächeninhaltes an und der Satz ist damit bewiesen. Für den Inhalt des ganzen Quadranten hat man natürlich das Produkt aus der letzten Ordinate y' und dem Horizontalzuge H zu nehmen.

In gewissem Sinne wird durch diese Construction die Aufgabe der Quadratur des Kreises gelöst, indem der Kreisinhalt auf ein ihm inhaltgleiches Rechteck zurückgeführt wird. Natürlich entspricht diese Lösung aber nicht dem Sinne, in dem die Aufgabe ursprünglich gestellt war. Nur dann, wenn man den Kreisumfang wirklich in unendlich viele Theile eintheilen könnte, wäre man berechtigt, die Lasten der einzelnen Bogenelemente durch deren Mitte zu führen. Sobald die Theile nicht unendlich klein sind, geht das resultirende Gewicht für jeden Theil nicht mehr genau durch die Mitte des Theils. Für die praktische Verwendung des Verfahrens, bei dem die Genauigkeit ohnehin durch die unvermeidlichen Zeichenfehler beschränkt ist, macht dies aber nichts aus.

Wie man sieht, kann übrigens auf diesem Wege auch ganz allgemein das erste Integral einer beliebig gegebenen Function q von x

$$\int q dx$$

construirt werden, gerade so, wie im vorigen Paragraphen das zweite Integral.

Aufgaben.

10. *Aufgabe. Ein Träger ist am einen Ende fest, am anderen Ende auf einem in schiefer Richtung gehenden Rollenlager aufgelagert; man soll die durch gegebene Lasten hervorgebrachten Auflagerkräfte ermitteln (vgl. Abb. 48).*

Lösung. Denkt man sich die gegebenen Lasten zu einer Resultirenden vereinigt, so muss diese mit den beiden Auflagerkräften im Gleichgewichte stehen. Von dem Auflagerdrucke am beweglichen Auflager kennt man von vornherein die Richtung, da diese senkrecht zur Auflagerbahn stehen muss. Verlängert man diese Richtungslinie bis zum Schnittpunkte mit der Richtungslinie der Resultirenden aller Lasten, so muss durch den Schnittpunkt