



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 19. Die elastische Linie als Seilcurve

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

geführt ist, erhält man durch deren Verbindung eine zweite Curve, die in der Abbildung durch eine gestrichelte Linie angegeben ist, während die vorige punktirt ausgezogen war. Die von dieser neuen Curve umschlossene Fläche, die ebenfalls mit Hülfe des Planimeters auszumessen ist, sei mit F'' bezeichnet. Man hat nun

$$\Theta' = \int y^2 dF = \int y^2 z dy = a^2 \int z'' dy = a^2 F'. \quad (22)$$

Hiermit ist also in der That Θ' bekannt. Um daraus Θ zu finden, beachte man, dass

$$\Theta' = \Theta + s^2 F \quad \text{und daher} \quad \Theta = a^2 \left(F'' - \frac{F'^2}{F} \right) \quad (23)$$

ist. Damit ist die Aufgabe gelöst.

§ 19. Die elastische Linie als Seilcurve.

Ein Balken, der irgendwie aufgelagert sein kann und durch Lasten, die senkrecht zu seiner Längsrichtung an ihm angreifen, auf Biegung beansprucht wird, erfährt eine elastische Formänderung, durch die seine vorher geradlinige Längs-Axe in eine Curve übergeht, die man als die elastische Linie des Balkens bezeichnet. Wie Mohr gezeigt hat, kann die Gestalt der elastischen Linie durch Construction von zwei Seilecken gefunden werden. Zum Nachweise dafür muss ich mich hier auf Untersuchungen des III. Bandes über die elastische Linie beziehen, deren selbständige Durchführung an dieser Stelle zu lange aufhalten würde.

Rechnet man die Abscissen x im Sinne der Stabaxe und bezeichnet man die Ordinate der elastischen Linie für den Querschnitt x mit y , so gilt nach Gl. (78) des dritten Bandes die Differentialgleichung

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -M. \quad (24)$$

Hierin ist M das Biegemoment für den Querschnitt x , während E den Elasticitätsmodul und Θ das Trägheitsmoment des Querschnitts bedeutet. Zugleich sei noch darauf hingewiesen,

dass bei dieser Gleichung nur auf jene Formänderung Rücksicht genommen ist, die durch das Biegemoment hervorgerufen wird, während der Einfluss der Schubspannungen auf die Gestalt der Biegelinie vernachlässigt ist. Bei kurzen, dicken Stäben kann dieser recht merklich sein; bei schlankeren Stäben, wie sie bei den Anwendungen, die von dem Verfahren gemacht zu werden pflegen, gewöhnlich vorkommen, ist er aber nur unbedeutend und kann daher ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden.

Vergleicht man mit Gl. (24) die in § 14 abgeleitete Differentialgleichung einer zu einer Belastungsfläche von der Intensität q an der Abscisse x gehörigen Seilcurve, Gl. (2), S. 80

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -q,$$

so erkennt man, dass beide leicht zur Uebereinstimmung mit einander gebracht werden können. Falls Θ constant ist, braucht man nur q überall proportional mit M anzunehmen und zugleich durch geeignete Wahl von H dafür zu sorgen, dass

$$\frac{M}{E\Theta} = \frac{q}{H} \quad (25)$$

ist. Dann stimmen beide Gleichungen völlig mit einander überein und daraus folgt, dass die elastische Linie zugleich eine jener Seilcurven ist, die man zu einer Belastungsfläche construiren kann, deren Ordinate an jeder Stelle proportional mit M ist. Um unter allen, die möglich sind, gerade jene herauszusuchen, die sich mit der elastischen Linie deckt, muss man noch die Grenzbedingungen beachten, die der elastischen Linie durch die Art der Auflagerung des Balkens vorge-schrieben sind.

Eine Fläche, deren Ordinaten proportional mit M sind, ist uns schon aus § 16 bekannt. Achten wir zunächst nur auf einen Balken, der beiderseits frei (d. h. ohne Einspannung) aufliegt, so erhält man durch Construction eines Seilpolygons, das wir hier als das „erste“ Seilpolygon bezeichnen wollen und dessen Horizontalzug gleich H_1 sein mag, sowie nach

Eintragung der Schlusslinie die „Momentenfläche“, also eine Fläche, deren Abschnitte auf lothrechten Linien mit H_I multiplicirt an jeder Stelle das zugehörige Biegemoment M liefern. Jene Abschnitte waren in § 16 mit y bezeichnet; da der Buchstabe hier in anderer Bedeutung gebraucht wird, mögen sie jetzt mit u bezeichnet werden. Man hat dann

$$M = H_I u. \quad (26)$$

Ist der Balken in anderer Art aufgelagert, z. B. wie bei den in § 17 besprochenen Gerber'schen Trägern, so wird sich ebenfalls eine Momentenfläche construiren lassen, von der vorstehende Gleichung gilt.

Diese Momentenfläche sehe man nun als Belastungsfläche für ein „zweites“ Seileck an, dessen Belastungsrichtung mit jener des ersten übereinstimmt und dessen Horizontalzug jetzt H_{II} heissen soll. Um der vorher genannten Bedingung zu genügen, setzen wir M aus Gl. (26) in Gl. (25) ein, beachten, dass q nun durch u und H durch H_{II} zu ersetzen sind und lösen die Gleichung nach H_{II} auf. Wir finden dann

$$H_{II} = \frac{E \Theta}{H_I}. \quad (27)$$

Die Dimension von H_{II} geht aus der Gleichung ebenfalls hervor; sie ist

$$[H_{II}] = \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}^4}{\text{cm}^2 \cdot \text{kg}} = \text{cm}^2.$$

H_{II} ist daher eine Fläche und dies muss auch so sein, weil auch die Lasten, die mit H_{II} vereinigt werden sollen, durch Flächen, nämlich durch den Inhalt der Momentenfläche gebildet werden.

Die Aufgabe, die elastische Linie zu construiren, kommt demnach darauf hinaus, eine Seilcurve von gegebener Belastungsfläche zu construiren, deren Horizontalzug durch Gl. (27) angegeben ist und die zugleich die Grenzbedingungen an den Auflagern erfüllt. In dieser Form wäre aber die Lösung der Aufgabe aus verschiedenen Gründen unbequem und man ändert

sie daher noch ein wenig ab. Man kann nämlich leicht darauf verzichten, die wahre Gestalt der elastischen Linie auf der Zeichnung zu erhalten — umsomehr als sich diese nur sehr undeutlich von der vorher geraden Stabaxe abheben würde —, wenn man nur anzugeben vermag, wie gross die Ordinate y an jeder Stelle ist.

Zunächst ändert man daher die Grenzbedingungen ab. Anstatt darauf zu bestehen, dass die elastische Linie durch die Auflagerpunkte gehen müsse, construirt man beim frei aufliegenden Balken irgend eine Seilcurve die im Uebrigen den Bedingungen genügt, und trägt in sie eine Schlusslinie ein, so als wenn sie selbst wieder zur Construction einer neuen Momentenfläche benutzt werden sollte. Misst man nun die Abschnitte zwischen der Schlusslinie und der Seilcurve, die auf lothrechten Linien gebildet werden, so geben diese die gesuchten Ordinaten y der elastischen Linie an. Man kann dies auf verschiedene Art nachweisen, am einfachsten, wenn man bedenkt, dass das Product $H_{II}y$, wie auch die Seilcurve im Uebrigen construirt sein mag, immer denselben Werth behalten muss, da es das Biegemoment darstellt, das in einem Balken hervorgerufen würde, der die durch die erste Momentenfläche angegebene Belastung wirklich zu tragen hätte.

Auf einer ganz ähnlichen Erwägung beruht auch die zweite Aenderung, zu der man sich aus Rücksicht auf die bessere Ausführung der Zeichnung veranlasst sieht. Rechnet man nämlich H_{II} nach Gl. (27) aus, so erhält man in praktisch vorliegenden Fällen eine Fläche, die ganz bedeutend grösser ist, als der Inhalt der Momentenfläche. Wählt man nun den Maassstab im Kräfteplane so, dass H_{II} die Grenzen des verfügbaren Raumes nicht überschreitet, so fallen die Lasten, die durch die Momentenfläche dargestellt werden, zu klein aus, als dass sie noch genau genug aufgetragen werden könnten. Dies kann auch nicht überraschen; denn man weiss ja in der That, dass sich der Balken unter den gewöhnlich vorliegenden Umständen verhältnissmässig nur sehr wenig durchbiegt. Die elastische Linie ist daher eine sehr flache Seilcurve, deren

Horizontalzug sehr gross gegenüber ihren Lasten sein muss. Wollte man trotzdem darauf bestehen, die Ordinaten y der elastischen Linie in der richtigen verhältnissmässigen Grösse zu construiren, so würden sie auch noch, ganz abgesehen von der vorher erwähnten Schwierigkeit der genauen Zeichnung des Kräfteplans und des zugehörigen Seilecks, in der Zeichnung so klein ausfallen, dass man sie mit dem Zirkel kaum noch abstechen könnte. In Wirklichkeit mögen sie ja vielleicht gar nicht so klein sein; auf dem beschränkten Raume eines Zeichenblattes ist man aber genöthigt, die ganze Zeichnung, die man sich in Naturgrösse vorzustellen hat, so stark zu verkleinern, dass die Ordinaten y nicht mehr gut abmessbar sind.

Man umgeht diese Schwierigkeit sehr leicht, indem man das zweite Seileck gar nicht mit dem Horizontalzuge H_{II} , sondern mit einem erheblich kleineren H'_{II} construirt, der etwa $\frac{1}{n}$ von H_{II} betragen mag. Dies hat zur Folge, dass dann alle y in n -facher Grösse, etwa als y' , erscheinen. Man bedenke nämlich, dass auf jeden Fall

$$H_{II}y = H'_{II}y'$$

sein muss, da, wie vorher schon bemerkt, jedes dieser Produkte die Bedeutung eines Biegemomentes für einen Balken hat, der die durch die erste Momentenfläche angegebenen Lasten wirklich zu tragen hätte.

Am besten richtet man es gewöhnlich so ein, dass die y' die wahren Werthe der y in natürlicher Grösse darstellen, während alle übrigen Längen, also namentlich die Spannweite des Balkens in stark verkleinertem Maassstabe aufzutragen sind. Hat man also die Zeichnung ursprünglich in $\frac{1}{n}$ der natürlichen Grösse angefertigt, so setze man an Stelle von H_{II} in Gl. (27)

$$H'_{II} = \frac{1}{n} \frac{E \Theta}{H_I} \quad (28)$$

und man findet dann die elastische Linie in verzerter Gestalt, so dass ihre Abscissen im Maassstabe $1:n$, die Ordinaten y

aber in wahrer Grösse auszumessen sind. — Wenn es erwünscht erscheinen sollte, kann man die Verzerrung aber natürlich auch noch weiter treiben — oder sie auch weniger gross wählen —, da es ganz unserem Belieben anheimgestellt ist, welchen Horizontalzug H'_{II} wir wählen wollen, falls nur der zugehörige Maassstab, nach dem die Ordinaten y auszumessen sind, passend dazu bestimmt wird.

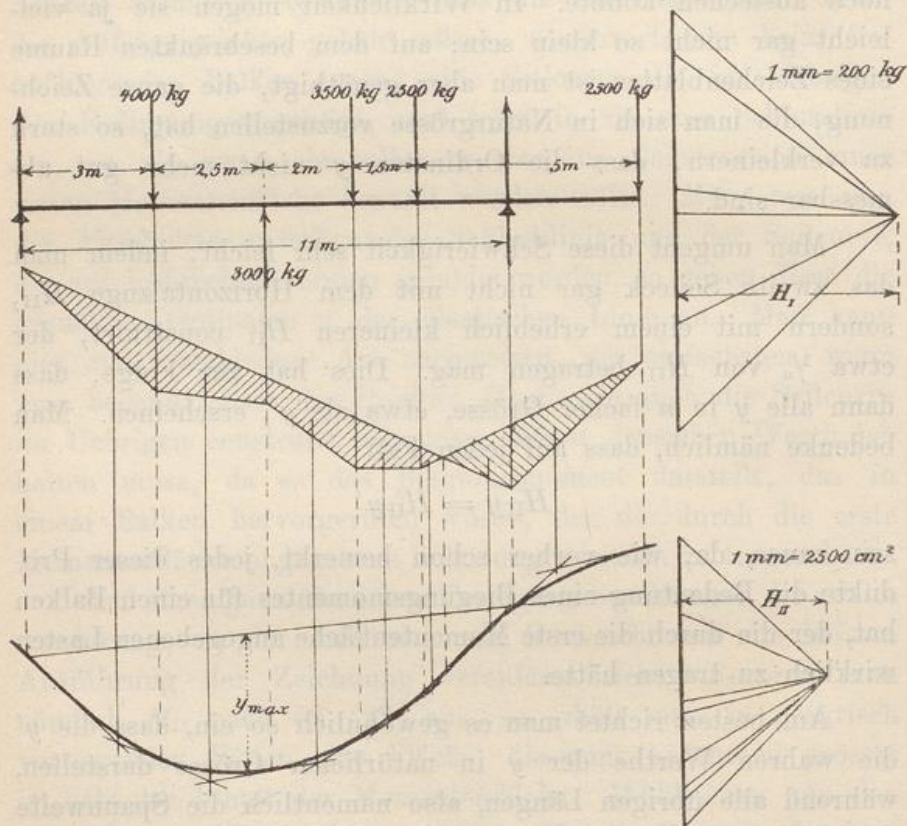


Abb. 45.

In Abb. 45 ist die Construction für einen bestimmten Fall im Maassstabe durchgeführt. Ein I-Träger von 30 cm Höhe, dessen Trägheitsmoment nach den Profiltabellen 9888 cm^4 beträgt, überdeckt eine Spannweite von 11 m, über die er nach rechts hin noch um 3 m vorkragt und nimmt die in die Zeichnung eingetragenen Lasten auf, von denen eine senkrecht

nach oben gerichtet ist. Unmittelbar unterhalb der Ansichtszeichnung des Trägers ist mit Hülfe eines Seilecks, dessen Horizontalzug H_I zu 5000 kg gewählt ist, die Momentenfläche construirt. Der rechte Theil stellt negative Momente dar und die ihm entsprechenden Lasten sind daher mit nach oben gerichteten Pfeile in das zweite Seileck aufzunehmen.

Wenn der Elasticitätsmodul $E=2100000$ atm angenommen wird, erhält man für H_{II} nach Gl. (27)

$$H_{II} = \frac{2100000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 9888 \text{ cm}^4}{5000 \text{ kg}} = 4150000 \text{ cm}^2.$$

Beim Ausmessen der Belastungsflächen des zweiten Seilpolygons ist zu beachten, dass die Spannweite des Trägers im Maassstabe 1 : 200 aufgetragen ist. Hiernach bedeutet 1 qmm der Momentenfläche in der Zeichnung in Wirklichkeit das 40000 fache oder 400 cm². Eine zweckmässige Grösse des zweiten Kräfteplans erhält man bei der Wahl des Maassstabes 1 mm = 2500 cm². Hiernach würde freilich H_{II} gleich 1640 mm aufzutragen sein. Hiervon nehmen wir aber nur $\frac{1}{100}$, setzen also

$$H'_{II} = 16,4 \text{ mm}$$

im Kräfteplane. Die Ordinaten der elastischen Linie erscheinen dann in hundertfacher Verzerrung oder, da der Maassstab der Längen 1 : 200 ist, in der Hälfte der natürlichen Grösse. Hätte man H'_{II} nur halb so gross gewählt, so hätte man die Durchbiegungen in natürlicher Grösse gefunden.

Für die Construction des zweiten Seilpolygons wurde die Momentenfläche in Dreiecke und Trapeze zerlegt, in deren Schwerpunkten Einzellasten angenommen wurden, die durch die Flächeninhalte in dem angegebenen Maassstabe darzustellen waren. Dadurch erhielt man das Tangentenpolygon, in das nachträglich die Seilcurve selbst mit Hülfe eines Curvenlineals eingetragen werden konnte. Die Schlusslinie geht durch die Schnittpunkte der beiden Auflagervertikalen mit dem Seilpolygone und von ihr aus sind die Ordinaten der elastischen Linie auf lothrechten Linien abzumessen. Mit dem Zirkel

findet man leicht die Stelle der grössten Durchbiegung y_{\max} des Trägers heraus. In dem Beispiele ergibt sich diese auf der Zeichnung zu 15 mm; wegen des vorher besprochenen Maassstabes bedeutet dies aber in Wirklichkeit eine Durchbiegung von 30 mm. — Der nach rechts vom rechten Auflager aus vorkragende Theil des Trägers hebt sich, wie aus der Zeichnung zu erkennen ist, nach oben hin auf und ist mit der Hohlseite nach unten hin gekrümmt, wie es den negativen Biegemomenten entspricht. Auf der durch den Schnittpunkt des ersten Seilpolygons mit seiner Schlusslinie gezogenen Vertikalen liegt der Wendepunkt der elastischen Linie.

Bisher war angenommen, dass das Trägheitsmoment Θ constant sei. Die Construction wird aber nicht wesentlich geändert, wenn Θ in beliebiger, aber gegebener Weise veränderlich ist. Man muss dann nur, um die Uebereinstimmung der Differentialgleichung für die elastische Linie mit der Gleichung der Seilcurve herzustellen, dafür sorgen, dass nun q nicht mehr mit M , sondern mit $\frac{M}{\Theta}$ überall proportional ist. Man wähle irgend einen Querschnitt des Trägers, etwa den in der Mitte aus, um dessen Trägheitsmoment Θ_m mit dem Trägheitsmomente Θ an irgend einer anderen Stelle zu vergleichen. Dann forme man die Momentenfläche so um, dass ihre Ordinaten u überall durch

$$u = \frac{\Theta_m}{\Theta}$$

ersetzt werden. Da Θ überall gegeben sein sollte, ist dies leicht auszuführen. Die so umgeformte Fläche ist dann als Belastungsfläche des zweiten Seilpolygons anzunehmen, dessen Horizontalzug H_{II} nun an Stelle von Gl. (27)

$$H_{II} = \frac{E \Theta_m}{H_I} \quad (29)$$

zu wählen ist. — Gerade hierin, dass ein beliebig veränderliches Trägheitsmoment dem graphischen Verfahren gar keine besonderen Schwierigkeiten macht, liegt gegenüber dem ana-

lytischen Verfahren, das in der unmittelbaren Integration der Differentialgleichung besteht, ein grosser Vorzug.

Unter manchen Umständen kann auch noch ein anderes Verfahren am Platze sein, das in Abb. 46 zur Ausführung gebracht wurde. Ist das Trägheitsmoment des Trägers nämlich absatzweise constant, so kann man die elastische Linie zu

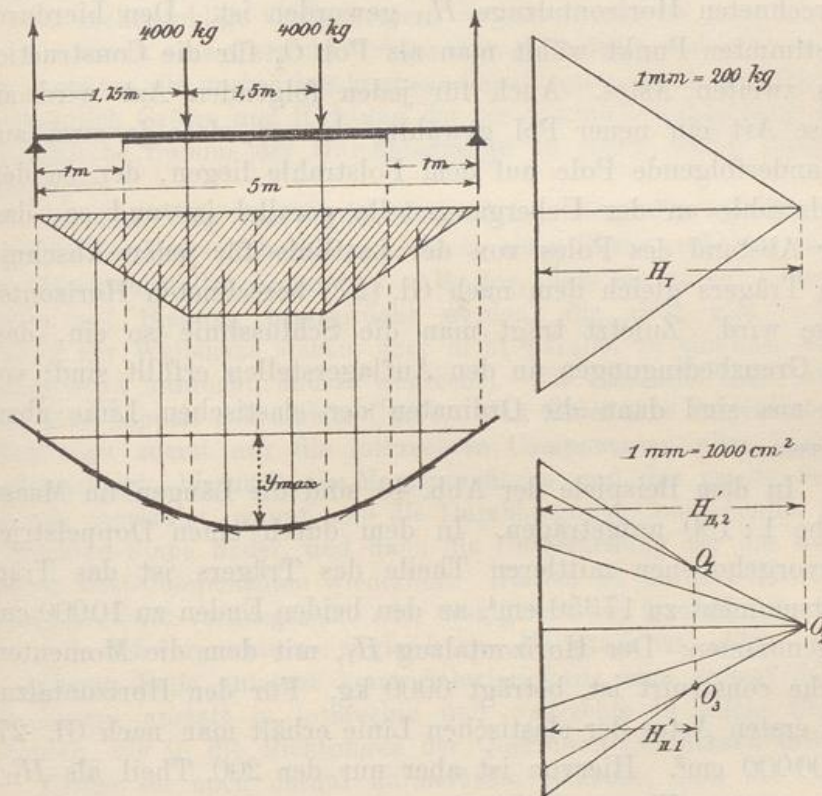


Abb. 46.

jedem Abschnitte von gleichem Trägheitsmomente genau wie in Abb. 45 konstruieren. Zu jedem anderen Abschnitte gehört ein anderer Ast der elastischen Linie, der zwar ebenfalls als Seilcurve, aber unter Anwendung eines anderen Horizontalzuges konstruiert werden kann. Die elastische Linie setzt sich dann aus der Aneinanderreihung aller dieser Seilcurvenstücke zusammen, die sich ohne Knick aneinanderschliessen und die

Grenzbedingungen an den Auflagerstellen erfüllen müssen. Man beginnt mit der Construction etwa am linken Ende, indem man den Pol O_1 im Kräfteplane beliebig wählt. An der Uebergangsstelle zum nächsten Aste muss der Seilstrahl eine gemeinsame Tangente an beide Aeste bilden. Im Kräfteplane verlängert (oder verkürzt) man daher den zugehörigen Polstrahl so lange, bis der Polabstand gleich dem für den zweiten Ast nach Gl. (27) berechneten Horizontalzuge H_{II} geworden ist. Den hierdurch bestimmten Punkt wählt man als Pol O_2 für die Construction des zweiten Astes. Auch für jeden folgenden Ast wird auf diese Art ein neuer Pol gewählt; also so, dass je zwei aufeinanderfolgende Pole auf dem Polstrahle liegen, der zu dem Seilstrahle an der Uebergangsstelle parallel ist und so, dass der Abstand des Poles von der Lastlinie für jeden Abschnitt des Trägers gleich dem nach Gl. (27) berechneten Horizontalzuge wird. Zuletzt trägt man die Schlusslinie so ein, dass die Grenzbedingungen an den Auflagerstellen erfüllt sind; von ihr aus sind dann die Ordinaten der elastischen Linie abzumessen.

In dem Beispiele der Abb. 46 sind die Längen im Maassstabe 1 : 100 aufgetragen. In dem durch einen Doppelstrich hervorgehobenen mittleren Theile des Trägers ist das Trägheitsmoment zu 17350 cm^4 , an den beiden Enden zu 10000 cm^4 angenommen. Der Horizontalzug H_I , mit dem die Momentenfläche construiert ist, beträgt 6000 kg . Für den Horizontalzug des ersten Astes der elastischen Linie erhält man nach Gl. (27) 3500000 cm^2 . Hiervon ist aber nur der 200. Theil als $H_{II,1}$ genommen. Ebenso findet man

$$H'_{II,2} = \frac{1}{200} \cdot \frac{2100000 \cdot 17350}{6000} = 30362 \text{ cm}^2,$$

die durch $30,4 \text{ mm}$ im Kräfteplane des zweiten Seilpolygons dargestellt werden; als Elasticitätsmodul ist dabei wieder $E = 2100000 \text{ atm}$ angenommen. Die elastische Linie erscheint in 200facher Verzerrung. Da aber zugleich alle Längen 100fach verkleinert sind, werden die Ordinaten der elastischen Linie in doppelter Grösse aus der Zeichnung entnommen. Die grösste

Durchbiegung y_{\max} findet hier in der Mitte statt; die Zeichnung liefert dafür 11 mm, in Wirklichkeit beträgt daher der Biegungs Pfeil 5,5 mm.

Schliesslich mögen noch einige Bemerkungen Platz finden, die zwar weniger wichtig sind, aber doch gelegentlich von Nutzen sein können. Geht nämlich zunächst die Belastungsebene nicht durch eine Querschnittshauptaxe des Trägers (vgl. hierzu die einschlägigen Lehren des dritten Bandes), so zerlegt man die Biegungsmomente in zwei rechtwinklige Componenten, so dass die Ebene jeder Componente durch eine Querschnittshauptaxe geht, führt dann für beide Componenten die vorher beschriebene Construction durch und findet nachträglich Grösse und Richtung der gesammten Durchbiegung als geometrische Summe der Durchbiegungen in jenen beiden Hauptrichtungen.

Derselbe Weg führt auch zum Ziele, wenn die am Balken angreifenden Lasten überhaupt nicht in einer Ebene enthalten sind. Bei Maschinenwellen kommt es z. B. vor, dass sie durch mehrere Kräfte auf Biegung beansprucht werden, die zwar alle rechtwinklig zur Wellenaxe stehen, aber nicht parallel zu einander sind (einige etwa lothrecht, andere wagrecht). Die elastische Linie wird dann eine doppelt gekrümmte Curve. Man findet ihre Projektionen, indem man zuerst nur die lothrechten Componenten aller Lasten berücksichtigt, hiernach die Momentenfläche und das zweite Seilpolygon construirt, womit man die Durchbiegungs-Componenten im lothrechten Sinne findet, und dann die Untersuchung für die wagrechten Last-Componenten wiederholt. Hierbei ist ein kreisförmiger Stabquerschnitt vorausgesetzt oder wenigstens ein Querschnitt, von dem jede Schwerpunktsaxe zugleich eine Hauptaxe ist. Aber auch im anderen Falle entsteht keine Schwierigkeit; man zerlegt dann alle Lasten anstatt in lothrechte und wagrechte in solche Componenten, die in die Richtungen der Querschnittshauptaxen fallen.

Ferner sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass die Construction einer Seilcurve ganz allgemein die Ermittlung des Doppelintegrals

$$\iint q \, dx \, dx$$

auf graphischem Wege gestattet, wenn darin q eine beliebige gegebene Function von x bedeutet, die als Ordinate der Belastungsfläche graphisch dargestellt werden kann. Die Ermittlung der elastischen Linie bildet nur ein Beispiel (freilich das technisch wichtigste) für die Ausführung einer solchen mechanischen Integration.

Man könnte natürlich zu dem zweiten Seilpolygone bei den vorhergehenden Betrachtungen auch noch ein drittes u. s. f. construiren, das aus dem vorigen ebenso abzuleiten wäre, wie das zweite aus dem ersten. Damit würde man auch noch das vierte, sechste Integral u. s. f. von q ableiten können.

§ 20. Ermittlung von Flächeninhalten mit Hülfe des Seilpolygons.

Flächeninhalte ermittelt man am besten mit Hülfe eines Planimeters oder, wenn ein solches nicht zu Gebote steht, durch Zerlegen der Figur in einfachere Theile, deren Inhalte auf Grund geometrischer Sätze sofort berechnet werden können. So gelangt man z. B. auf jeden Fall zu einem hinreichend genauen Resultate, indem man die Figur in schmale Streifen zerlegt, die sich als Trapeze ansehen lassen, den Inhalt für jeden Streifen berechnet und alle addirt oder anstatt dessen durch Anwendung der Simpson'schen Regel.

Aus diesem Grunde ist die Anwendung des Seilpolygons zur Berechnung von Flächeninhalten, die hier noch besprochen werden soll, von geringerer Bedeutung. Man macht indessen

immerhin zuweilen davon Gebrauch und sie soll daher hier nicht übergangen werden.

Das Verfahren ist durch Abb. 47, in der es auf die Ermittlung des Inhaltes eines Kreisquadranten angewendet wurde, erläutert. In Wirklichkeit würde man es natürlich bei so einfachen Fällen nicht gebrauchen; man wird aber sehen, dass es in derselben Form auch

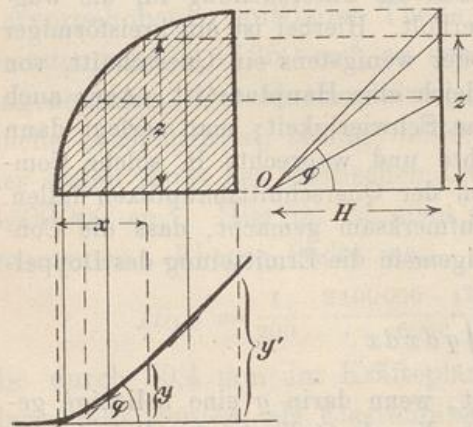


Abb. 47.

zum Ziele führt, wenn der Kreisbogen durch irgend eine andere Curve ersetzt wird.