



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Vorlesungen über technische Mechanik**

**Föppl, August**

**Leipzig, 1900**

§. 18. Die graphische Ermittlung von Trägheitsmomenten

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

Seileckseiten zu verbinden haben, um die Schlusslinie und hiermit die Momentenfläche für diese Oeffnung zu erhalten. Denkt man sich diese Linie in die Abbildung eingetragen, so erkennt man sofort, dass die Momentenfläche dann viel grösser ausfällt, als vorher. Von der Grösse der Momente hängt aber die Biegungsbeanspruchung des Balkens ab. Der Kragträger wird demnach durch die gegebenen Lasten weniger stark beansprucht, als wenn jede Oeffnung für sich überdeckt wäre und in diesem Umstande ist der Vortheil begründet, der sich durch die Gerber'sche Anordnung erzielen lässt.

§ 18. Die graphische Ermittlung von Trägheitsmomenten.

Betrachtet man irgend eine gerad- oder krummlinig begrenzte Figur als Belastungsfläche einer Seilcurve, so gibt die zwischen der Seilcurve und ihrer Anfangstangente eingeschlossene Momentenfläche zugleich das statische Moment des links davon liegenden Theiles der Figur für eine Axe  $\sigma\sigma$  an. Zieht man auch noch die Tangente am anderen Ende, so sind die zwischen ihr und der Seilcurve auf  $\sigma\sigma$  abgeschnittenen Strecken zugleich den statischen Momenten der rechts von  $\sigma\sigma$  liegenden Flächentheile proportional. Die in den vorigen Paragraphen besprochene Anwendung des Seilpolygons liefert daher zugleich die Momente ersten Grades von Querschnittsflächen in Bezug auf alle in der Querschnittsebene parallel zur gewählten Kraft- richtung gezogenen Axen.

Aber auch Momente zweiten Grades können mit Hülfe des Seilpolygons gefunden werden. Zur Bestimmung des Trägheitsmoments eines Schienenprofils oder einer anderen theils gerad-, theils krummlinig begrenzten Querschnittsfläche bildet dieses Verfahren sogar das bequemste und empfehlenswertheste Hilfsmittel. Zur Begründung des Verfahrens diene Abb. 42. Die Belastungsfläche ist hier genau der in Abb. 34 (S. 77) nachgebildet und die Seilcurve, deren Construction dort erläutert wurde, ist hier ebenfalls von dort übernommen. Nur die Eintheilung in die Belastungsstreifen und das den Einzel-

lasten entsprechende, aus Tangenten der Seilcurve bestehende Seilpolygon ist in der neuen Figur weggelassen, weil diese Linien zwar zur Construction der Seilcurve nöthig sind, nachher aber nicht mehr gebraucht und daher fortgelöscht werden können. Verlängert man die äussersten Seileckseiten, also die Endtangente der Seilcurve, bis sie sich schneiden, so geht durch diesen Punkt die Resultirende der das Seil belastenden Gewichte, d. h. die Linie  $SS$  ist die Schwerlinie der Belastungsfläche.

Man betrachte ferner einen unendlich schmal zu denkenden Streifen  $dF$  der Belastungsfläche im Abstände  $y$  von  $SS$ .

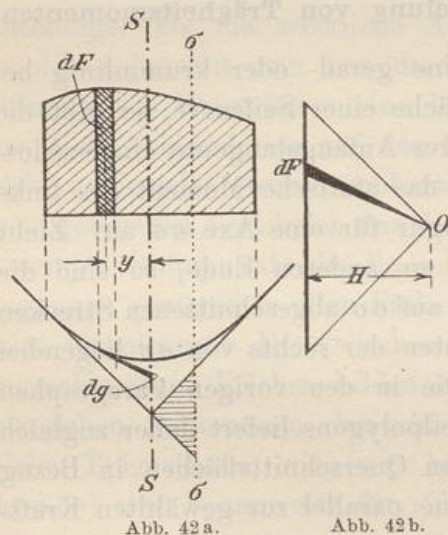


Abb. 42 a.

Abb. 42 b.

Verlängert man die Grenzlinien des Streifens bis zur Seilcurve und zieht an beiden Punkten der Seilcurve Tangenten, so schliessen diese mit  $SS$  das in der Abbildung schwarz hervorgehobene, schmale Dreieck ein. Die auf  $SS$  liegende Grundlinie des Dreiecks sei mit  $dg$  bezeichnet. Der gegenüberliegende Endpunkt, also der Schnittpunkt beider Tangenten liegt auf der Schwerlinie des Streifens  $dF$ . Die zu  $dg$  gehörige

Höhe des Dreiecks ist daher gleich  $y$  und der Inhalt des Dreiecks gleich  $\frac{1}{2} dg \cdot y$ .

Im Kräfteplane Abb. 42<sup>b</sup> kann man durch Ziehen von Parallelen zu den beiden Tangenten ein ebenfalls schwarz hervorgehobenes Dreieck abgrenzen, das dem in Abb. 42<sup>a</sup> ähnlich ist, weil die Seiten parallel zu einander gehen. Man hat daher die Proportion

$$\frac{dF}{H} = \frac{dg}{y} \quad \text{oder} \quad H dg = y dF.$$

Denkt man sich diese Gleichung für alle links von  $SS$  liegenden Streifen angeschrieben und alle summirt, so erhält man das Moment ersten Grades des links von  $SS$  liegenden Flächen-theiles gleich dem Produkte aus dem Horizontalzuge  $H$  und der Summe aller  $dg$ , d. h. dem Abschnitte zwischen Seilcurve und Anfangstangente. Damit gelangen wir nur wieder auf anderem Wege zu den bereits früher gezogenen Schlüssen zurück.

Um auf die Momente zweiten Grades zu kommen, multiplicire man die vorige Gleichung mit  $y$ . Damit erhält man

$$y^2 dF = Hydg \quad \text{und daher} \quad \int y^2 dF = H \int y dg.$$

Die Summirung auf der rechten Seite kann aber unmittelbar ausgeführt werden. Denn das Integral gibt das Doppelte aus der Summe aller jener Dreiecke an, von denen vorher eines besprochen wurde. Diese Dreiecke folgen alle stetig aufeinander und füllen den zwischen der Seilcurve, der Anfangstangente und der Linie  $SS$  liegenden Raum aus. Dabei ist übrigens gar nicht einmal nöthig, dass  $SS$  die Schwerlinie ist; auch für irgend eine andere, parallel zu  $SS$  gezogene Linie  $\sigma\sigma$  bleibt die Betrachtung anwendbar und die zwischen ihr, der Curve und der Anfangstangente abgegrenzte Fläche gibt nach Multiplikation mit  $2H$  das Moment zweiten Grades für  $\sigma\sigma$  von dem links davon liegenden Theile der Belastungsfläche an.

Um das Moment für die ganze Belastungsfläche zu erhalten, braucht man nur das Moment für die rechte Hälfte hinzuzufügen. Für dieses gilt natürlich dieselbe Betrachtung; es kann auch gleich dem Produkte aus  $2H$  und dem zwischen der Seilcurve, der Endtangente und der Linie  $SS$  oder  $\sigma\sigma$  liegenden Flächenstücke gesetzt werden. Dabei ist zu beachten, dass jedes Flächenelement der Belastungsfläche nur positive Beiträge zum Trägheitsmomente liefern kann; die von links und rechts her stammenden Beiträge sind daher ohne Vorzeichenunterschied zusammenzuzählen.

Ein Blick auf Abb. 42<sup>a</sup> lehrt, dass das Trägheitsmoment unter allen parallel zu einander gezogenen Axen für die Schwer-

linie  $SS$  am kleinsten ausfällt. Es ist nämlich gleich dem Produkte aus  $2H$  und der zwischen der Seilcurve und ihren beiden Endtangenten eingeschlossenen Fläche. Für eine Axe  $\sigma\sigma$  vergrößert sich dagegen diese Fläche um das zwischen  $\sigma\sigma$  und den beiden Endtangenten abgeschnittene Dreieck, das in Abb. 42<sup>a</sup> durch eine horizontale Schraffurung ausgezeichnet ist.

Der Horizontalzug  $H$  der Seilcurve hat die Bedeutung eines Flächeninhaltes. Als Lasten dienten nämlich die Flächeninhalte der Belastungsstreifen und mit diesen muss  $H$  von

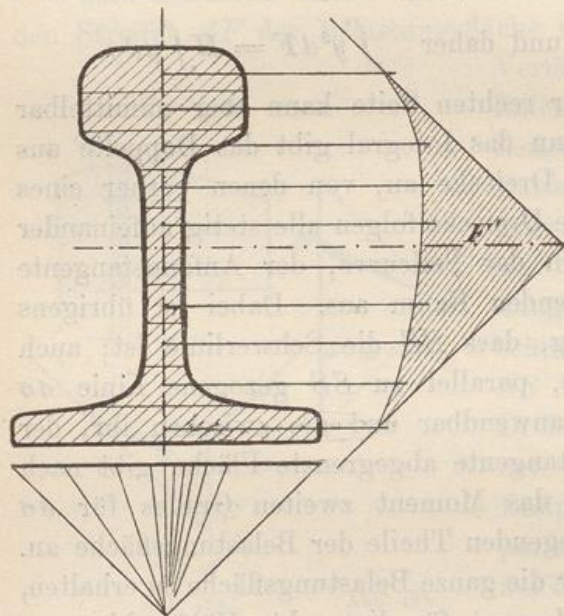


Abb. 43.

gleicher Art sein. Am besten wählt man  $H$  im Kräfteplane so, dass es die Hälfte der Belastungsfläche  $F$  darstellt. Dies wird sofort erreicht, wenn man die beiden äussersten Polstrahlen in Richtungen von  $45^\circ$  zieht. Dann bildet nämlich  $H$  die Höhe eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks, dessen

Hypotenuse die Summe aller  $dF$ , also  $F$  selbst angibt. Bezeichnet man ferner die zwischen der Seilcurve und ihren beiden Endtangenten liegende Fläche mit  $F'$  und das Trägheitsmoment für die Schwerlinie  $SS$  mit  $\Theta$ , so hat man, unter der Voraussetzung, dass  $H$  in der eben angegebenen Weise gewählt wurde,

$$\Theta = F \cdot F'. \quad (20)$$

Die Inhalte der Flächen  $F$  und  $F'$  ermittelt man am besten mit Hilfe eines Planimeters.

In Abb. 43 ist das Verfahren auf ein Schienenprofil angewendet. — Um die Central-Ellipse oder den Querschnittskern einer Querschnittsfläche zu erhalten, muss man dasselbe Verfahren für die beiden Haupttaxen wiederholen.

Ausser dem bisher besprochenen Verfahren, das von Mohr herrührt, ist noch eine andere graphische Methode zur Bestimmung von Trägheitsmomenten zu erwähnen, die von Nehls angegeben ist. Freilich hat diese mit dem Seilpolygone nichts zu schaffen; sie soll aber an dieser Stelle ebenfalls besprochen werden. Die Nehls'sche Methode beruht auf einer einfachen Umformung des für das Trägheitsmoment aufgestellten Summenausdrucks, nämlich

$$\Theta = \int y^2 dF = a^2 \int \left(\frac{y}{a}\right)^2 dF.$$

Man formt jeden Flächenstreifen  $dF$  so um, dass er in  $\left(\frac{y}{a}\right)^2 dF$  übergeht, und erhält dann  $\Theta$  als Produkt aus der Summe dieser umgeformten Flächenstreifen und aus  $a^2$ .

Gewöhnlich wird bei der Anwendung des Verfahrens der Schwerpunkt der Querschnittsfläche noch nicht bekannt sein. Man zieht dann irgendwo eine Parallele  $AA$  zur Schwerlinie, für die das Trägheitsmoment gesucht wird und bestimmt sowohl das statische Moment als das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche für diese Parallele als Axe. Bei einem Schienenprofile, das in Abb. 44 wiederum als Beispiel gewählt wurde, kann man etwa die Basislinie dazu benutzen. Dann zieht man in einem Abstände  $a$ , der beliebig angenommen werden kann,

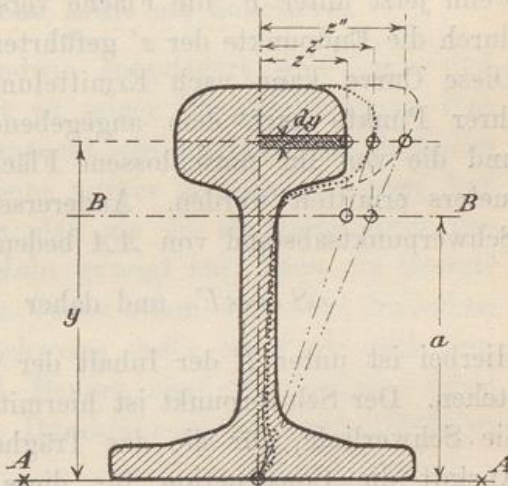


Abb. 44.

eine Parallele  $BB$  zu  $AA$ . Den Querschnitt denkt man sich in Streifen eingetheilt, die parallel zu  $AA$  und  $BB$  gehen. Ein solcher Streifen, der in der Abbildung durch Querschraffirung hervorgehoben ist, möge die Breite (oder auch die halbe Breite bei einem symmetrischen Profile)  $z$ , die Höhe  $dy$  und den Abstand  $y$  von  $AA$  haben. Dann kann  $dF = zdy$  und der Beitrag von  $dF$  zum statischen Momente  $S$  gleich  $yzdy$  gesetzt werden. Nun construire man eine Strecke  $z'$  so, dass

$$z' = z \frac{y}{a}$$

ist, was durch Ziehen der aus der Abbildung ersichtlichen Linien ohne Weiteres geschehen kann. Dann ist

$$S = \int y dF = \int yz dy = a \int z' dy = aF',$$

wenn jetzt unter  $F'$  die Fläche verstanden wird, die von der durch die Endpunkte der  $z'$  geführten Curve umschlossen wird. Diese Curve kann nach Ermittlung einer genügenden Zahl ihrer Punkte nach dem angegebenen Verfahren eingetragen und die von ihr umschlossene Fläche mit Hilfe eines Planimeters ermittelt werden. Andererseits ist aber, wenn  $s$  den Schwerpunktsabstand von  $AA$  bedeutet, auch

$$S = sF \quad \text{und daher} \quad s = a \frac{F'}{F}. \quad (21)$$

Hierbei ist unter  $F$  der Inhalt der Querschnittsfläche zu verstehen. Der Schwerpunkt ist hiermit bekannt und damit auch die Schwerlinie, für die das Trägheitsmoment gesucht wird. Anstatt die Construction für diese Schwerlinie unmittelbar weiter zu führen, thut man aber besser daran, auch das Trägheitsmoment zunächst für die Axe  $AA$  zu ermitteln. Es sei zum Unterschiede von dem für die Schwerlinie gültigen mit  $\Theta'$  bezeichnet.

Zu jedem  $z'$  construirt man nun auf dieselbe Weise wie vorher ein  $z''$ , so dass

$$z'' = z' \frac{y}{a}, \quad \text{also} \quad z'' = z \frac{y^2}{a^2}$$

ist. Nachdem dies für eine genügende Zahl von Punkten aus-

geführt ist, erhält man durch deren Verbindung eine zweite Curve, die in der Abbildung durch eine gestrichelte Linie angegeben ist, während die vorige punktirt ausgezogen war. Die von dieser neuen Curve umschlossene Fläche, die ebenfalls mit Hülfe des Planimeters auszumessen ist, sei mit  $F''$  bezeichnet. Man hat nun

$$\Theta' = \int y^2 dF = \int y^2 z dy = a^2 \int z'' dy = a^2 F'. \quad (22)$$

Hiermit ist also in der That  $\Theta'$  bekannt. Um daraus  $\Theta$  zu finden, beachte man, dass

$$\Theta' = \Theta + s^2 F \quad \text{und daher} \quad \Theta = a^2 \left( F'' - \frac{F'^2}{F} \right) \quad (23)$$

ist. Damit ist die Aufgabe gelöst.

### § 19. Die elastische Linie als Seilcurve.

Ein Balken, der irgendwie aufgelagert sein kann und durch Lasten, die senkrecht zu seiner Längsrichtung an ihm angreifen, auf Biegung beansprucht wird, erfährt eine elastische Formänderung, durch die seine vorher geradlinige Längs-Axe in eine Curve übergeht, die man als die elastische Linie des Balkens bezeichnet. Wie Mohr gezeigt hat, kann die Gestalt der elastischen Linie durch Construction von zwei Seilecken gefunden werden. Zum Nachweise dafür muss ich mich hier auf Untersuchungen des III. Bandes über die elastische Linie beziehen, deren selbständige Durchführung an dieser Stelle zu lange aufhalten würde.

Rechnet man die Abscissen  $x$  im Sinne der Stabaxe und bezeichnet man die Ordinate der elastischen Linie für den Querschnitt  $x$  mit  $y$ , so gilt nach Gl. (78) des dritten Bandes die Differentialgleichung

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -M. \quad (24)$$

Hierin ist  $M$  das Biegemoment für den Querschnitt  $x$ , während  $E$  den Elasticitätsmodul und  $\Theta$  das Trägheitsmoment des Querschnitts bedeutet. Zugleich sei noch darauf hingewiesen,