



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 15. Die Kettenlinie

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

§ 15. Die Kettenlinie.

Wenn ein Seil, das nur sein Eigengewicht zu tragen hat, stärker durchhängt, als bisher vorausgesetzt war, genügt die vorige Annäherung nicht mehr. Man muss dann von vornherein Rücksicht darauf nehmen, dass die Belastung jedes Seilelementes nicht dem zugehörigen Abscissenelemente, sondern dem Bogendifferentiale proportional ist. Die einer solchen Belastung entsprechende Seilcurve wird als eine Kettenlinie bezeichnet.

Man kann die Theorie der Kettenlinie zwar unmittelbar an die vorher schon abgeleitete Differential-Gleichung der Seilcurve anknüpfen; da sich aber die Rechnungen bei einer etwas anderen und für diesen Fall zweckmässigeren Wahl des Coordinatensystems einfacher gestalten, soll von den vorausgehenden Entwicklungen kein Gebrauch gemacht werden.

Jedenfalls ist die Kettenlinie symmetrisch in Bezug auf eine durch den tiefsten Punkt in lothrechter Richtung gezogene Axe gestaltet. Für den Fall, dass die beiden Aufhängepunkte in gleicher Höhe liegen, ist dies ohne Weiteres klar. Aber auch für den entgegengesetzten Fall muss es noch zutreffen — abgesehen davon, dass der eine Schenkel dann länger wird, als der andere —, weil man sich von der zu gleich hohen Stützpunkten gehörigen Kettenlinie irgend einen Punkt festgehalten denken kann, ohne an dem Gleichgewichtszustande etwas zu ändern. Der Gleichgewichtszustand muss dann auch noch weiter bestehen bleiben, wenn man den auf der einen Seite des festen Punktes liegenden Theil ganz entfernt, indem die letzte Seilspannung des beibehaltenen Theiles von dem festen Punkte aufgenommen wird. Die allgemeine Anwendbarkeit der folgenden Betrachtungen erfährt daher keine Einschränkung, wenn wir in erster Linie ein Seil ins Auge fassen, dessen Stützpunkte beiderseits gleich hoch liegen.

In Abb. 37^a ist eine Kettenlinie gezeichnet. Die Y -Axe des Coordinatensystems fällt mit der Symmetrie-Axe zusammen, während die horizontale X -Axe um einen später noch näher

anzugebenden Abstand a unterhalb des Scheitels der Curve liegen soll. Die Ordinaten y werden hier im Gegensatze zu der bei der Ableitung der allgemeinen Differentialgleichung der Seilcurven getroffenen Festsetzung nach oben hin positiv gerechnet. Im Punkte xy der Kettenlinie ist eine Tangente gezogen, die den Winkel φ mit der X -Axe bilden möge. Parallel zu ihr ist im Kräfteplane, Abb. 37^b, ein Polstrahl gezogen, der die Seilspannung im

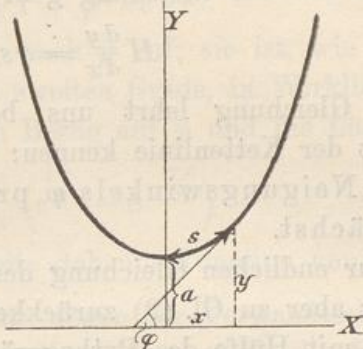


Abb. 37 a.

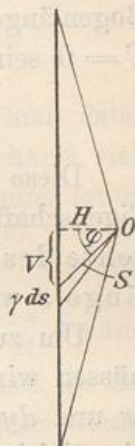


Abb. 37 b.

Punkte xy angibt. Ausserdem ist auch noch ein zweiter Polstrahl gezogen, der zu einem dem vorigen unendlich nahe benachbarten Punkte gehören soll. Zwischen beiden Punkten liegt das Bogendifferential ds der Kettenlinie, dessen Gewicht gleich γds gesetzt werden kann, wenn man unter γ das Gewicht der Längeneinheit des Seiles versteht. Man hat wieder, wie bei der ähnlichen Entwicklung des vorigen Paragraphen

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V}{H} \quad \text{oder auch} \quad H \frac{dy}{dx} = V$$

und wenn wir zum nächsten Punkte übergehen,

$$H d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dV = \gamma ds$$

oder in Form einer Differentialgleichung geschrieben

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = \gamma \frac{ds}{dx} \quad (9)$$

Da H und γ constant sind, kann die Gleichung sofort einmal integriert werden. Man erhält

$$H \frac{dy}{dx} = \gamma s + C.$$

Die Integrations-Constante C bestimmt sich aus der Bedingung, dass im Scheitel $\frac{dy}{dx}$ gleich Null ist. Zählen wir also die Bogenlänge s bis zum Punkte xy vom Scheitel aus, so muss $C = 0$ sein und die Gleichung geht über in

$$H \frac{dy}{dx} = \gamma s. \quad (10)$$

Diese Gleichung lehrt uns bereits eine merkwürdige Eigenschaft der Kettenlinie kennen: sie zeigt, dass die Tangente des Neigungswinkels φ proportional der Bogenlänge s wächst.

Um zur endlichen Gleichung der Kettenlinie zu gelangen, müssen wir aber zu Gl. (9) zurückkehren und darin ds durch dx und dy mit Hülfe des Pythagoräischen Satzes ausdrücken. Die Gleichung geht dann über in

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = \gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (11)$$

Die Variable y selbst kommt in dieser Gleichung nicht vor. Bezeichnen wir den ersten Differentialquotienten von y nach x vorübergehend mit p , so lässt sie sich in der Form

$$H \frac{dp}{dx} = \gamma \sqrt{1 + p^2}$$

anschreiben, die in Bezug auf die Variable p von der ersten Ordnung ist. Um die Gleichung zu integrieren, ordnen wir sie wie folgt:

$$H \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \gamma dx,$$

und von da können wir unmittelbar zur Stammgleichung gelangen, indem wir beiderseits integrieren. Dabei ist die Integralformel

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \lg(p + \sqrt{1 + p^2})$$

zu beachten, von deren Richtigkeit man sich leicht durch Ausführung der Differentiation an dem Logarithmus überzeugt. Die vorhergehende Gleichung liefert daher

$$H \lg(p + \sqrt{1 + p^2}) = \gamma x + C_1.$$

Auch die hierbei auftretende Integrations-Constante C_1 ist wegen der Grenzbedingung $p = 0$ für $x = 0$ gleich Null zu setzen. Geht man ferner vom Logarithmus zum Numerus über, so erhält man

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{\gamma x}{H}}.$$

Diese Gleichung lösen wir nach p auf; sie ist, wie man dabei findet, nur scheinbar vom zweiten Grade, in Wirklichkeit vielmehr vom ersten Grade in Bezug auf p und die Lösung lautet

$$p = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\gamma x}{H}} - e^{-\frac{\gamma x}{H}} \right). \quad (12)$$

Die auf der rechten Seite stehende Function von $\frac{\gamma x}{H}$ kommt öfters vor und man hat ihr wegen der Verwandtschaft, in der sie zu den goniometrischen Functionen steht, die Bezeichnung des hyperbolischen Sinus gegeben. Gebraucht man dafür die Bezeichnung \sinh und erinnert man sich zugleich der Bedeutung von p , so lässt sich die Gleichung auch in der kürzeren Form

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{\gamma x}{H} \quad (13)$$

anschreiben. Setzt man diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ in Gl. (10) ein, so findet man auch die Bogenlänge s als Function von x , nämlich

$$s = \frac{H}{\gamma} \sinh \frac{\gamma x}{H}. \quad (14)$$

Um auch y zu erhalten, müssen wir Gl. (13) noch einmal integrieren. Wer mit den Hyperbel-Functionen ein wenig bekannt ist, weiss schon, dass das Integral von \sinh den hyperbolischen Cosinus liefert. Im anderen Falle braucht man aber nur auf Gl. (12) zurückzugehen und die leicht auszuführende Integration an den Exponential-Functionen vorzunehmen. Man erhält dann

$$y = \frac{H}{\gamma} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\gamma x}{H}} + e^{-\frac{\gamma x}{H}} \right) + C_2. \quad (15)$$

Der Faktor von $\frac{H}{\gamma}$ bildet jene Function, die man den hyperbolischen Cosinus nennt. Die neu aufgetretene Integrations-Constante C_2 ist aus der Bedingung zu ermitteln, dass $y = a$

wird für $x = 0$. Wir wollen nun den Abstand a , dessen Grösse bisher unbestimmt gelassen wurde, so wählen, dass auch die Integrations-Constante C_2 verschwindet, damit wir zu möglichst einfachen Formeln gelangen. Für $x = 0$ geht Gl. (15) über in

$$a = \frac{H}{\gamma} + C_2$$

und C_2 verschwindet daher, wenn wir

$$a = \frac{H}{\gamma} \quad (16)$$

wählen. Hiermit nimmt die Gleichung der Kettenlinie die einfache Form

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (17)$$

an. Der Werth von a lässt, wie aus Gl. (16) hervorgeht, wenn man sie in der Form $H = a\gamma$ schreibt, eine anschauliche Deutung zu. Es ist nämlich jene Seillänge, deren Gewicht gleich dem Horizontalzuge der Kettenlinie ist.

Auch für die Seilspannung S an irgend einem Punkte xy der Kettenlinie kann man einen einfachen Ausdruck aufstellen. Zunächst hat man, wie aus Abb. 37^b hervorgeht,

$$V = H \operatorname{tg} \varphi \quad \text{und} \quad S = H\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = H\sqrt{1 + p^2},$$

wenn die vorher schon gebrauchte Abkürzung p für $\frac{dy}{dx}$ oder $\operatorname{tg} \varphi$ wieder benutzt wird. Setzt man p aus Gl. (12) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + p^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{4 + \left(e^{\frac{\gamma x}{H}} - e^{-\frac{\gamma x}{H}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\gamma x}{H}} + e^{-\frac{\gamma x}{H}} \right) = \cosh \frac{\gamma x}{H}. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth in die vorige Gleichung ein und drückt zugleich H nach Gl. (16) in a aus, so findet man

$$S = a\gamma \cosh \frac{x}{a}$$

und mit Rücksicht auf Gl. (17) geht dies über in

$$S = \gamma y. \quad (18)$$

Die Seilspannung ist daher an jeder Stelle der Ordinate y proportional und die Gleichung $H = ay$ ist nur als ein besonderer Fall von Gl. (18) anzusehen, da der Horizontalzug H zugleich die Spannung im Scheitel der Kettenlinie angibt.

Für die Hyperbel-Functionen hat man Tafeln ausgerechnet, die ganz ähnlich eingerichtet sind, wie die Tafeln der goniometrischen Functionen. Sie sind zwar nicht so häufig verbreitet, wie die gewöhnlichen Sinustafeln, aber doch in manchen Logarithmentafeln und in vielen anderen Tabellenwerken wenigstens in auszugsweiser Form zu finden. Auch das bekannte Werk „Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch“ enthält solche Tafeln. Mit deren Hülfe gestalten sich die Zahlenrechnungen über Kettenlinien auf Grund der vorausgehenden Formeln in manchen Fällen fast noch einfacher, als wenn man — bei flachen Curven — Parabeln an Stelle der Kettenlinien annimmt.

§ 16. Die Momentenfläche.

In Abb. 38^a seien die Kräfte $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots$ durch ein Seilpolygon $\mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_1 \dots$ verbunden, wozu der Kräfteplan Abb. 38^b gehöre. Man lege irgendwo einen Schnitt $\sigma\sigma$ durch das Seilpolygon, der dieses im Punkte C trifft.

Es handele sich darum, das statische Moment aller links vom Punkte C liegenden Kräfte $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$ in Bezug auf diesen Punkt als Momentenpunkt festzustellen.

An diesem Momente wird nichts geändert, wenn wir auch die Kräfte \mathfrak{S}_0 und \mathfrak{S}'_0 , die sich gegenseitig aufheben, mit einrechnen. Nun war aber \mathfrak{S}_0 mit allen links vom Schnitte

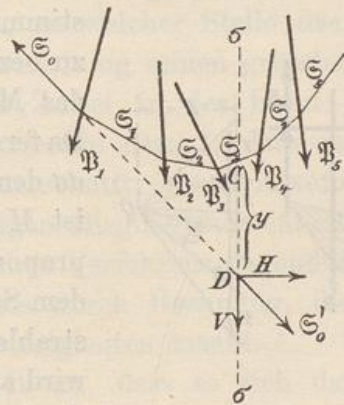


Abb. 38 a.

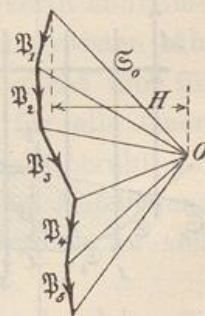


Abb. 38 b.