



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Vorlesungen über technische Mechanik**

**Föppl, August**

**Leipzig, 1900**

§. 14. Differential-Gleichung der Seilcurve

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

und dementsprechend Schwerpunkt und Inhalt ermitteln. Für einen geübten Zeichner genügt es oft vollständig, den Abstand des Schwerpunktes von der Streifenmitte einfach einzuschätzen. Um die Inhalte möglichst einfach zu finden, nimmt man die Streifen am besten alle von gleicher Breite. Die Inhalte sind dann den mittleren Höhen der Trapeze proportional. Da es nun gar nicht auf den Maassstab des Kräfteplans ankommt, könnte man diese mittleren Höhen ohne Weiteres als Maass für die Streifengewichte in den Kräfteplan eintragen. Damit dieser nicht eine unbequeme Grösse erlangt, zieht man indessen vor, von allen Höhen nur einen bestimmten Bruchtheil im Kräfteplane aufzutragen. Der Pol des Kräfteplans kann natürlich wieder beliebig gewählt werden, da man zu einer stetig vertheilten Belastung ebensogut beliebig viele Seilcurven construiren kann, wie beim Zusammensetzen von Einzellasten beliebig viele Seilecke.

Nachdem das Seileck auf diese Weise construirt ist, verlängert man die Streifengrenzen bis zu den Schnittpunkten  $A, B$  u. s. f. mit den Seileckseiten. Man weiss dann, dass diese Punkte der gesuchten Seilcurve angehören und kennt zugleich die Tangentenrichtungen an diesen Punkten. Es bedarf gar keiner besonders grossen Anzahl von Punkten und Tangenten, um die Seilcurven so genau, als man es für praktische Zwecke nur irgend wünschen kann, freihändig oder mit Hilfe des Curvenlineals dazwischen einzulegen.

#### § 14. Differentialgleichung der Seilcurve.

In vielen Fällen ist es nöthig, die Eigenschaften der Seilcurven analytisch zu untersuchen; schon desshalb weil es auf diesem Wege viel leichter möglich ist, allgemein gültige Sätze aufzufinden, als auf dem geometrischen Wege.

In Abb. 35<sup>a</sup> ist oben eine beliebige Belastungsfläche, unten eine zugehörige Seilcurve gezeichnet. Im Abstände  $x$  vom linken Ende der Belastungsfläche sei die Belastungsintensität mit  $q$ , die von irgend einer Horizontalen aus senkrecht nach abwärts

gerechnete Ordinate der Seilcurve mit  $y$  bezeichnet. Ausserdem ist an dieser Stelle eine Tangente an die Seilcurve gelegt, deren Winkel mit der Horizontalen gleich  $\varphi$  sei. Dieser Tangente entspricht eine gewisse Seilspannung, deren Grösse in Abb. 35<sup>b</sup> durch einen parallel dazu gezogenen Polstrahl dargestellt wird. Sie lässt sich

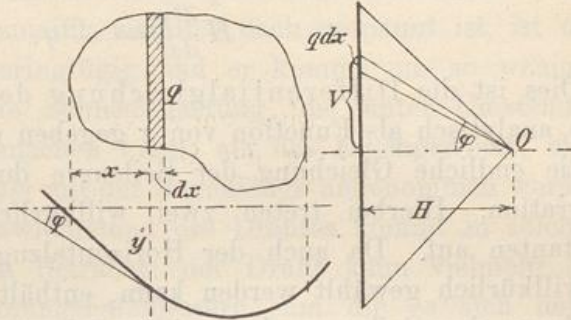


Abb. 35 a.

Abb. 35 b.

in eine senkrechte Komponente  $V$  und eine horizontale Komponente  $H$  zerlegen, die im Kräfteplane ersichtlich gemacht sind. Der Winkel  $\varphi$  kommt im Kräfteplane ebenfalls vor und man hat

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V}{H}.$$

Nun gehe man um  $dx$  weiter. Man erhält einen neuen Punkt der Seilcurve und eine ihm zugehörige Tangente, die in Abb. 35<sup>a</sup> nicht besonders angegeben ist, weil sie sich mit der vorigen zu nahe decken würde. Dagegen ist im Kräfteplane die zugehörige Parallele eingetragen.

Beachtet man, dass nach den Lehren der analytischen Geometrie  $\operatorname{tg} \varphi$  im Differentialquotienten von  $y$  ausgedrückt werden kann, so lässt sich die vorige Gleichung auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{H}$$

schreiben und für die Änderung von  $\operatorname{tg} \varphi$  beim Weitergehen um  $dx$  erhält man daher

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = d\left(\frac{V}{H}\right).$$

Nun ändert sich  $H$  überhaupt nicht, während  $V$  sich, wie aus dem Kräfteplane entnommen werden kann, um das Gewicht des Belastungsstreifens  $q dx$  vermindert. Man hat daher

$$Hd\left(\frac{dy}{dx}\right) = -qdx$$

oder nach Division mit  $dx$

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -q. \quad (2)$$

Dies ist die Differentialgleichung der Seilcurve. Wenn  $q$  analytisch als Function von  $x$  gegeben ist, findet man daraus die endliche Gleichung der Seilcurve durch zweimalige Integration. Hierbei treten zwei willkürliche Integrations-Constanten auf. Da auch der Horizontalzug  $H$  des Seilpolygons willkürlich gewählt werden kann, enthält die allgemeine Gleichung der Seilcurve drei willkürliche Constanten. Dies entspricht dem Umstande, dass zu einer gegebenen Belastungsfläche beliebig viele Seilcurven gezeichnet werden können. Um eine unter ihnen näher zu kennzeichnen, müssen noch besondere Bedingungen hinzutreten, die zur Ermittlung der Integrations-Constanten und des Horizontalzuges  $H$  ausreichen.

Für den besonders häufig vorkommenden Fall einer gleichförmigen Lastvertheilung soll die Rechnung sofort weiter durchgeführt werden. Wenn  $q$  constant ist, erhält man aus Gl. (2) durch zweimalige Integration

$$\left. \begin{aligned} H\frac{dy}{dx} &= -qx + C_1. \\ Hy &= -q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wenn die Integrations-Constanten mit  $C_1$  und  $C_2$  bezeichnet werden. Die Seilcurve bildet demnach eine Parabel.

Seile, Ketten oder dünne Drähte, deren Biegungswiderstand vernachlässigt werden kann und die eine der horizontalen Richtung nach wenigstens annähernd gleichförmig vertheilte Belastung zu tragen haben, kommen bei Ketten- oder Kabel-Brücken, bei Telegraphenleitungen und bei Drahtseilbahnen vor. Ein Telegraphendraht z. B., der zwischen zwei weit von einander entfernten Stützen ausgespannt ist, hat seine Eigenlast, zuzüglich einer im Winter bei Rauchfrost oder Schneefall ihm anhaftenden Eislast zu tragen, die als der

ganzen Länge nach gleichförmig vertheilt angenommen werden kann. Freilich ist die Eigenlast streng genommen der Bogenlänge und nicht der Abscisse  $x$  proportional. Wenn der Draht, wie es gewöhnlich zutrifft, ziemlich flach gespannt ist, ist der Unterschied aber geringfügig und er kommt um so weniger in Betracht, als die Schneebelastung, die unter Umständen erheblich mehr ausmachen kann, als das Eigengewicht, eher proportional mit  $x$  als mit der Bogenlänge angenommen werden kann. Der Biegungswiderstand des Drahtes kommt in solchen Fällen gar nicht in Betracht; der Draht kann vielmehr bei den grossen Krümmungshalbmessern, um die es sich dabei handelt, als ein absolut biegsames Seil angesehen werden.

In Abb. 36, die sich auf einen solchen Fall bezieht, sind  $A$  und  $B$  die beiden Stützen, zwischen denen der Draht ausgespannt ist. Dabei ist angenommen, dass beide gleich hoch liegen. Der Ursprung des Coordinatensystems ist auf die linke Stütze  $A$  und die  $X$ -Axe in die Verbindungslinie  $AB$  gelegt.

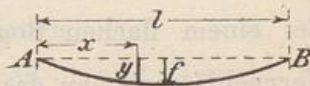


Abb. 36.

An beiden Stützen gilt die Grenzbedingung, dass  $y$  zu Null werden muss. Hieraus folgen die Werthe der Integrationsconstanten  $C_1$  und  $C_2$  in Gl. (3);  $C_2$  muss zu Null werden und  $C_1$  folgt aus

$$0 = -\frac{ql^2}{2} + C_1 l \quad \text{zu} \quad C_1 = \frac{ql}{2}.$$

Die Parabelgleichung geht damit über in

$$Hy = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}. \quad (4)$$

Den Pfeil  $f$  der Seilcurve in der Mitte findet man hieraus zu

$$f = \frac{ql^2}{8H} = \frac{Ql}{8H}, \quad (5)$$

wobei in der letzten Form unter  $Q$  die Gesamtbelastung  $ql$  des Seiles oder Drahtes zu verstehen ist. Umgekehrt hat man auch

$$H = \frac{Ql}{8f}. \quad (6)$$

und damit ist der Horizontalzug der Seilcurve bekannt für den Fall, dass die Durchhängung  $f$  des Seiles gegeben ist.

So wird die Aufgabe gewöhnlich gestellt. Es kann aber auch vorkommen, dass zur Ermittlung von  $H$  nicht  $f$ , sondern die Länge des Seiles, das zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  aufgehängt werden soll, gegeben ist. Dafür ist die Aufstellung einer Gleichung zwischen  $f$  und der Bogenlänge der Parabel erforderlich, also die Lösung einer rein geometrischen Aufgabe. Von dieser kann hier abgesehen werden; dagegen soll eine Näherungsformel, von der man bei flachen Parabelbögen mit Vortheil Gebrauch machen kann, abgeleitet werden.

Versteht man unter  $ds$  die Länge eines Bogenelementes, so hat man

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Bei einem flachen Bogen ist  $\frac{dy}{dx}$  überall ein kleiner Bruch.

Vernachlässigt man das Quadrat davon ganz gegen die Einheit, so kann in erster Annäherung  $ds = dx$  und die ganze Bogenlänge gleich der Entfernung  $l$  der beiden Stützen gesetzt werden. Diese Annäherung genügt aber bei manchen Aufgaben nicht, nämlich immer dann nicht, wenn es sich gerade um den Unterschied der Bogenlänge  $b$  von  $l$  handelt. Man erhält dann eine bis auf kleine Grössen höherer Ordnung genaue Annäherung, wenn man die Wurzel nach dem binomischen Satze entwickelt und sich auf die Beibehaltung der beiden ersten Glieder beschränkt. Man setze also

$$ds = dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right).$$

Führt man hier den Werth von  $\frac{dy}{dx}$  aus der Parabelgleichung ein und integrirt von 0 bis  $l$ , so erhält man

$$b = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{H^2} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2\right] dx.$$

Die Integration kann leicht bewerkstelligt werden und liefert

$$b = l + \frac{q^2 l^3}{24 H^2}. \quad (7)$$

Schliesslich kann auch noch der Werth von  $H$  aus Gl. (5) oder Gl. (6) eingesetzt werden, womit die vorige Gleichung übergeht in

$$b = l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l}. \quad (8)$$

Von diesen Näherungsformeln kann man z. B. mit Vortheil Gebrauch machen, um den Einfluss, den eine Temperaturänderung des Drahtes auf  $f$  und damit auch auf  $H$  ausübt, zu berechnen. Hierbei kann es (bei sehr flachen Bögen) auch nöthig werden, die elastische Verlängerung des Drahtes unter dem Einflusse des Horizontalzuges  $H$  in Berücksichtigung zu ziehen. Alle Aufgaben dieser Art können mit Hülfe der Formeln (5), (6) und (7), nöthigenfalls unter Heranziehung des Elasticitätsgesetzes, leicht gelöst werden.

Auch auf den Fall, dass die Stützen  $A$  und  $B$  nicht in gleicher Höhe liegen, lässt sich die Betrachtung leicht übertragen. Man hat dann  $C_1$  der geänderten Grenzbedingung entsprechend zu wählen. — Trägt das Seil ferner ausser einer gleichförmig vertheilten stetigen Belastung noch eine oder mehrere Einzellasten, wie es z. B. bei den Tragseilen von Drahtseilbahnen vorkommt, so zerfällt die Seilcurve in mehrere Parabelbögen, die sich an den Angriffsstellen der Einzellasten mit einem Knicke aneinander schliessen. Der Sprung in dem Werthe von  $\frac{dy}{dx}$  an einer solchen Stelle ist gleich der Einzellast, getheilt durch den Horizontalzug. Dies liefert eine Grenzbedingung an der Uebergangsstelle; die zweite besteht darin, dass  $y$  für beide Bögen an dieser Stelle denselben Werth haben muss. Diese Grenzbedingungen, verbunden mit jenen, die an den beiden Aufhängepunkten bestehen, genügen, um alle Integrationsconstanten für die Parabelbogenabschnitte zu berechnen. Die ausführliche Durchrechnung würde hier zuviel Raum in Anspruch nehmen.