Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 11. Seilpolygone, die zu verschiedenen Polen gehören linie von zwei Punkten bestimmt und zugleich muss sie der ihr in der reciproken Figur zugehörigen parallel gehen.

Diese Eigenschaft kann zunächst als eine willkommene Gelegenheit zur Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung betrachtet werden. Man bemerkt aber zugleich, dass sie eine rein geometrische Eigenschaft beider Figuren darstellt, da sie auch noch gültig bleibt, wenn man ganz von der mechanischen Bedeutung, die wir den Figuren gaben, absieht. Der Beweis beruht zwar auf dieser Deutung; die dadurch herausgefundene geometrische Gesetzmässigkeit ist aber von ihr unabhängig. Wir können sie in dem Satze aussprechen: *Laufen in zwei vollständigen Vierecken fünf Seiten (oder Diagonalen) paarweise parallel, so trifft dies auch für das letzte Paar zu.*

Der Schnittpunkt A in Abb. 29^a kann auch ins Unendliche rücken, d. h. die beiden Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ können parallel sein, ohne dass dadurch an dem beobachteten Verfahren, noch an dem daraus soeben abgeleiteten Satze etwas geändert würde. Drei Eckpunkte und drei Seiten des Kräfteplans in Abb. 29^b fallen dann in eine Gerade. — Ausserdem sieht man auch leicht ein, dass mehr als zwei Kräfte $\mathfrak{P}$ in derselben Weise zusammengesetzt werden können, wie hier die beiden. Das Seilpolygon erhält dann nur entsprechend mehr Seiten und im Kräfteplane gehen alle dazu parallel gezogenen „Polstrahlen“ durch denselben Punkt O wie jetzt schon $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$. Dieser Punkt O wird der *Pol* des Kräfteplans genannt. *In jedem Falle geht die Resultirende* aller $\mathfrak{P}$ in Abb. 29^a durch den Schnittpunkt der letzten Seilspannung mit der Richtungslinie von $\mathfrak{T}'$ oder, wie wir auch sagen können, *durch den Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten.*

§ 11. Seilpolygone, die zu verschiedenen Polen gehören.

Zu gegebenen Kräften $\mathfrak{P}$ kann man beliebig viele Seilpolygone ziehen. Wir wollen uns irgend zwei gezogen und die ihnen entsprechenden Kräftepläne aufeinander gelegt denken, so dass sie die Seiten $\mathfrak{P}$ (und daher auch $\mathfrak{R}$) gemeinsam haben. Man kann dann sagen, dass sich beide Kräftepläne nur durch eine verschiedene Wahl des Poles O von einander unterscheiden. Mit O ändern sich natürlich auch die Richtungen aller von ihm ausgehenden Polstrahlen. Wie nun auch die zu beiden Kräfteplänen gehörigen Seilpolygone im Übrigen gezogen sein mögen: auf jeden Fall besteht zwischen ihnen eine beachtenswerthe geometrische Beziehung. Die Schnittpunkte entsprechender Seilstrahlen (oder Seileckseiten) liegen nämlich auf einer Geraden und diese Gerade geht parallel zur Verbindungslinie beider Pole im Kräfteplane.

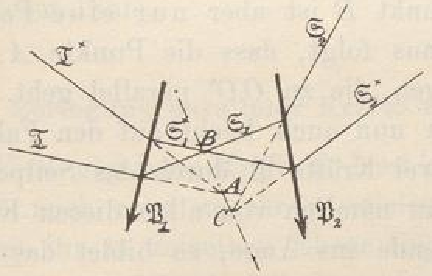

Abb. 30a.

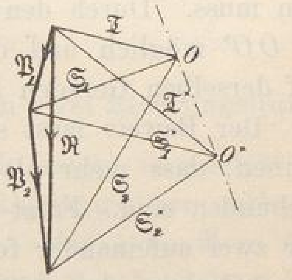

Abb. 30b.

Der Satz gilt zwar, wie man alsbald sehen wird, auch für zwei zu beliebig vielen Kräften $\mathfrak{P}$ construirte Seilecke; wir wollen ihn aber zunächst für den Fall beweisen, dass nur zwei Kräfte $\mathfrak{P}$ durch das Seileck vereinigt werden. Abb. 30[a] gibt die beiden Seilpolygone $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{T}^*$, $\mathfrak{S}_1^*$, $\mathfrak{S}_2^*$ und Abb. 30[b] die zugehörigen Kräftepläne mit den Polen O und O^* an. Man suche zunächst die Schnittpunkte A von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ und B von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1^*$ in Abb. 30[a] auf und verbinde beide durch eine Gerade. Dann fasse man das vollständige Viereck ins Auge, von dem A und B zwei Ecken sind, während die beiden anderen Ecken durch $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ auf der Richtungslinie von $\mathfrak{P}_1$ abgeschnitten werden. Diesem vollständigen Vierecke entspricht ein anderes im Kräfteplane, dessen Ecken durch die beiden Pole O und O^* und die Endpunkte von $\mathfrak{P}_1$ gebildet werden. In beiden Vierecken laufen fünf Seiten, nämlich die mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}^*$ und $\mathfrak{S}_1^*$ bezeichneten parallel zu einander, nach der Voraussetzung, dass Abb. 30^b als Kräfteplan zu Abb. 30^a gehören soll. Nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen geometrischen Lehrsatze müssen daher auch die letzten Seiten parallel zu einander sein, d. h. man hat $AB \parallel OO^*$.

Hierauf denke man sich den Schnittpunkt C der Seilstrahlen $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2^*$ in Abb. 30^a aufgesucht und ihn mit B verbunden. Dem vollständigen Vierecke mit den Eckpunkten B und C und der Gegenseite $\mathfrak{P}_2$ entspricht im Kräfteplane das vollständige Viereck mit den Eckpunkten O und O^* und der Gegenseite $\mathfrak{P}_2$. Auch hier laufen fünf Seiten paarweise parallel und man schliesst daraus, dass auch BC parallel OO^* sein muss. Durch den Punkt B ist aber nur eine Parallele zu OO^* möglich und daraus folgt, dass die Punkte A, B, C auf derselben Geraden liegen, die zu OO^* parallel geht.

Der Beweis lässt sich nun auch leicht auf den Fall ausdehnen, dass mehr als zwei Kräfte $\mathfrak{P}$ durch das Seilpolygon verbunden sind. Fasst man nämlich von allen diesen Kräften nur zwei aufeinander folgende ins Auge, so bildet das Stück des Seilzuges, das mit dem vor der ersten von ihnen liegenden Seilstrahle beginnt, sich durch den zwischen beiden Kräften liegenden Seilstrahl fortsetzt und mit dem auf die zweite Kraft folgenden Seilstrahle endet, zugleich ein Seilpolygon für die Vereinigung dieser beiden Kräfte. Wenn wir also alle Linien, die sonst noch im Seilpolygone und im Kräfteplane vorkommen, unbeachtet lassen, so behalten wir nur noch die in Abb. 30^a und 30^b angegebenen Figuren übrig und der vorausgehende Beweis bleibt für diese Theilstücke unverändert gültig. Die Schnittpunkte A, B, C der entsprechenden Seilstrahlen in beiden Seilecken müssen daher auf einer zu OO^* parallelen Geraden liegen. Wiederholt man dann dieselbe Betrachtung für den Fall, dass die zweite der vorher ausgewählten Kräfte $\mathfrak{P}$ und die auf sie folgende dritte herausgegriffen werden, so findet man, dass nun auch der Schnittpunkt D der gegen vorher neu hinzugekommenen Seilstrahlen mit B und C auf einer Geraden liegen muss. Und wenn man in dieser Weise weiter fortschreitet, zeigt sich, dass auch alle übrigen Schnittpunkte entsprechender Seilstrahlen auf der zuerst gefundenen Geraden ABC enthalten sein müssen.

Man macht von diesem Satze mit Vortheil Gebrauch, wenn man genöthigt ist, zu gegebenen Lasten nach einander mehrere Seilpolygone zu construiren. Dies kommt, wie man später sehen wird, namentlich bei der Construction der Drucklinien von Gewölben vor. Man erspart dann, nachdem ein Seilpolygon gezeichnet ist, bei den übrigen das Ziehen der Parallelen zu den Polstrahlen im Kräfteplane, das mühsamer ist, als das Ziehen von Verbindungslinien nach den Schnittpunkten der Seilstrahlen des ersten Seilecks mit der zu OO^* parallelen Linie.

§ 12. Zerlegung paralleler Kräfte nach zwei Richtungslinien.

Eine gegebene Kraft $\mathfrak{P}$ lässt sich immer in eindeutiger Weise nach zwei zu ihr parallelen Richtungslinien zerlegen, die mit ihr in derselben Ebene liegen. Man kann diese Aufgabe als einen Sonderfall der schon in § 2 behandelten Aufgabe ansehen, eine Kraft nach zwei Richtungslinien zu zerlegen, die sich mit ihr in einem Punkte schneiden und mit ihr in derselben Ebene liegen. Der gemeinsame Schnittpunkt ist hier nur ins Unendliche gerückt. Mit Hülfe eines Kräftedreiecks lässt sich die Aufgabe freilich nicht mehr lösen. Am einfachsten führt gewöhnlich die Anwendung des Momentensatzes zum Ziele. Man bedenkt, dass die geometrische Summe beider Kräfte gleich der gegebenen sein muss und dass beide für einen auf der Richtungslinie der gegebenen liegenden Momentenpunkt gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Momente haben müssen. Liegen die vorgeschriebenen Richtungslinien zu verschiedenen Seiten der gegebenen Kraft $\mathfrak{P}$, so sind beide gesuchten Kräfte gleichgerichtet mit $\mathfrak{P}$ und sie theilen sich in die Grösse von $\mathfrak{P}$ im umgekehrten Verhältnisse ihrer Abstände von $\mathfrak{P}$. Im anderen Falle ist die $\mathfrak{P}$ zunächst liegende Kraft mit ihr gleichgerichtet und grösser