Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Ausnahmefälle

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

und Begründung des Verfahrens machte zwar eine längere Auseinandersetzung nöthig; die wirkliche Ausführung der Zeichnung erfordert aber nur das Ziehen weniger Linien und gestaltet sich ganz einfach.

Dieselbe Aufgabe kann schliesslich auch noch analytisch gelöst werden. Man zieht zu diesem Zwecke drei rechtwinklig aufeinander stehende Coordinatenaxen und ermittelt die Winkel zwischen den Stabrichtungen und den Coordinatenrichtungen sowie die Projektionen $P_1 P_2 P_3$ von $\mathfrak{P}$ auf die Coordinatenaxen. Bezeichnet man dann die Spannung des Stabes 1 mit S_1 und die Richtungswinkel dieses Stabes mit $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und ähnlich bei den übrigen Stäben, so findet man die Unbekannten $S_1 S_2 S_3$ durch Auflösen der drei Componentengleichungen

$$\left.\begin{aligned} S_1 \cos\alpha_1 + S_2 \cos\alpha_2 + S_3 \cos\alpha_3 &= P_1, \\ S_1 \cos\beta_1 + S_2 \cos\beta_2 + S_3 \cos\beta_3 &= P_2, \\ S_1 \cos\gamma_1 + S_2 \cos\gamma_2 + S_3 \cos\gamma_3 &= P_3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

die alle vom ersten Grade sind. Die Ermittelung der Winkel und die Auflösung der Gleichungen verursacht aber in der Regel weit mehr Mühe, als irgend eine der vorher besprochenen graphischen Lösungen.

Schliesslich muss noch darauf hingewiesen werden, dass die Aufgabe keine Lösung mehr zulässt, sobald die drei Stäbe in derselben Ebene enthalten sind. Dieser Ausnahmefall, der in ähnlicher Weise auch noch bei manchen anderen Untersuchungen wiederkehren wird, erfordert noch eine aufmerksame Betrachtung. Er lässt sich in zwei Unterfälle spalten, die durch die Abb. 7 und 8 in axonometrischer Zeichnung wiedergegeben sind. Im Falle der Abb. 7 liegen zugleich die Fusspunkte A, B, C der drei Stäbe auf einer Graden. Man sieht hier sofort ein, dass der obere Knotenpunkt durch die drei Stäbe nicht mehr in seiner Lage festgehalten werden kann:

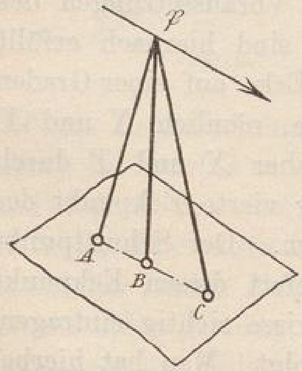

Abb. 7.

er vermag sich vielmehr um die Grade ABC ohne Widerstand zu drehen. Schon aus dieser geometrischen Betrachtung erkennt man, dass durch die Stabspannungen kein Gleichgewicht mehr am oberen Knotenpunkte hergestellt werden kann; es sei denn, dass die Kraft $\mathfrak{P}$ zufällig auch in der Stabebene liegt. Auch mechanisch geht dies daraus hervor, dass die Resultirende der drei Stabspannungen nothwendig wieder in der Stabebene liegen muss und daher mit einer Kraft, die zu dieser Ebene unter irgend einem Winkel geneigt ist, nicht im Gleichgewichte stehen kann. Liegt aber $\mathfrak{P}$ selbst in der Stabebene, so bleibt die Aufgabe statisch unbestimmt, da man *einer* Stabspannung einen beliebigen Werth beilegen und durch geeignete Wahl der beiden anderen Gleichgewicht herstellen könnte.

In dem durch Abb. 8 dargestellten Falle liegen die Fusspunkte A, B, C der drei Stäbe nicht mehr in einer Graden die Stäbe selbst aber immer noch in einer Ebene. Man nehme etwa an, dass zwei der Stäbe unmittelbar am Fussboden befestigt sind, während der Fusspunkt B des dritten Stabes auf irgend einer Erhöhung liegt, die um BB' über den Fussboden emporragt. In diesem Falle ist zwar eine endliche Verschiebung des oberen Knotenpunktes ohne Aenderung der Stablängen nicht mehr möglich, wohl aber, wie man zu sagen pflegt, eine unendlich kleine. Der obere Knotenpunkt vermag sich nämlich um eine unendlich kleine Strecke senkrecht zur Stabebene zu verschieben, ohne dass sich die Stablängen um mehr als um unendlich kleine Grössen *zweiter Ordnung* zu ändern brauchten, d. h. der Knotenpunktsweg ist ungemein gross gegenüber den sehr kleinen Aenderungen der Stablängen, die wegen der Elasticität der Stäbe zu erwarten sind. Man erkennt dies leicht daraus, dass sich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, von

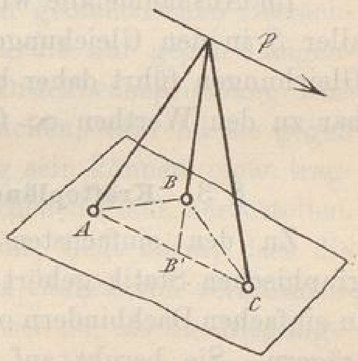

Abb. 8.

dem eine Kathete unendlich klein ist, nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung von der anderen Kathete unterscheidet. — Sobald eine solche Verschiebung des Knotenpunktes eingetreten ist, liegen die drei Stäbe nachher nicht mehr genau in derselben Ebene, so dass schliesslich doch wieder Gleichgewicht zwischen den Stabspannungen und der Belastung $\mathfrak{P}$ zu Stande kommen kann.

Hierbei ist aber noch zu beachten, dass die Stabspannungen sehr gross im Verhältnisse zur Last $\mathfrak{P}$ gefunden werden, wenn die Stäbe zwar nicht genau, aber nahezu in einer Ebene liegen. Man pflegt daher auch zu sagen, dass die Stabspannungen im Ausnahmefalle unendlich gross werden müssten, womit nur ausgedrückt werden soll, dass selbst durch noch so grosse Stabspannungen kein Gleichgewicht mehr am Knotenpunkte — im Falle der Abb. 8 wenigstens nicht ohne eine vorausgehende Verschiebung des Knotenpunktes — hergestellt werden könnte.

Im Ausnahmefalle wird die Determinante der Coefficienten aller S in den Gleichungen (1) zu Null; die Auflösung dieser Gleichungen führt daher beim analytischen Verfahren unmittelbar zu den Werthen ∞ für die Stabspannungen.

§ 3. **Kräftepläne für einfache Dachbinder.**

Zu den einfachsten und häufigsten Anwendungen der graphischen Statik gehört die Ermittelung der Stabspannungen in einfachen Dachbindern oder ihnen ähnlich gestalteten Brückenträgern. Sie beruht auf einer mehrfachen Wiederholung der im Anschlusse an Abb. 2 besprochenen Lösung der Aufgabe, eine gegebene Kraft nach zwei mit ihr in derselben Ebene liegenden Richtungslinien zu zerlegen. Freilich knüpfen sich daran alsbald noch weitergehende Ueberlegungen, die eine eingehende Besprechung erfordern.

Zur Erläuterung bemerke ich zunächst, dass man zur Errichtung von Brücken oder ähnlichen Tragconstructionen vor Allem zwei, oder bei freitragenden Dächern eine grössere Zahl von „Hauptträgern“ oder „Bindern“ in parallelen, lothrechten Ebenen aufzustellen pflegt, die die ganze Spannweite über-