Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Aufgaben 23 - 25.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

Mittelstütze in Wirklichkeit nicht in verticaler Richtung verschieben kann, während die zweite dasselbe für die zweite Mittelstütze aussagt. Die Auflösung liefert

$$C = P \cdot \frac{\alpha_{ax}\alpha_{bb} - \alpha_{bx}\alpha_{ab}}{\alpha_{aa}\alpha_{bb} - \alpha_{ab}^2}; \quad D = P \cdot \frac{\alpha_{ax}\alpha_{ba} - \alpha_{bx}\alpha_{aa}}{\alpha_{ab}^2 - \alpha_{aa}\alpha_{bb}}. \qquad (109)$$

Die Factoren von P in diesen Gleichungen können, da alle darin vorkommenden α durch die beiden elastischen Linien gegeben sind, ohne Weiteres berechnet werden, womit man die Einflusslinien der Lasten auf die beiden Mittelstützendrücke findet. Von da ab kann die Berechnung auch dieses Trägers genau so durchgeführt werden, als wenn er statisch bestimmt wäre. Man sieht leicht ein, wie dasselbe Verfahren in anderen Fällen anzuwenden ist. Die weiteren Ausführungen darüber gehören nicht mehr der allgemeinen Festigkeitslehre, sondern der Lehre vom Brückenbaue an.

Aufgaben.

23. Aufgabe. Eine Spannweite von 6 m (vgl. den Grundriss Abb. 42) wird durch drei nebeneinander liegende I-Träger vom Normalprofile 36, für das Θ nach dem deutschen Normalprofilbuche zu 19766 cm^4 angegeben ist, in gleichen Abständen von 1 m überdeckt. In der Mitte sind die Träger durch einen Querträger N. P. 20 ($\Theta = 2162$ cm^4) verbunden. Welche Last P darf man an der mittleren Kreuzungsstelle anbringen, wenn die Spannung σ an keiner Stelle 1000 atm überschreiten soll? Vom Eigengewichte der Träger kann abgesehen werden.

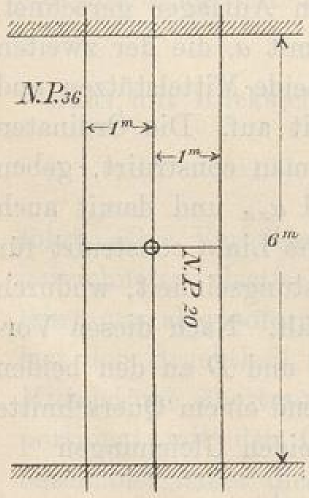

Abb. 42.

Lösung. Wir denken uns die Construction in zwei Theile getheilt, von denen der eine nur den mittleren Hauptträger, der andere die beiden äusseren Hauptträger und den Querträger umfasst. Jeder dieser Theile für sich genommen ist statisch bestimmt und als einzige statisch unbestimmte Grösse der ganzen Aufgabe kommt der Antheil Z in Betracht, den der mittlere Hauptträger von der Last P, die an ihm angebracht ist, auf den Querträger abgibt. Am mittleren Hauptträger bleibt dann die Belastung $P - Z$ und der Querträger seinerseits gibt an jeden der beiden äusseren Hauptträger die Last $\frac{Z}{2}$ weiter. An der Kreuzungsstelle müssen sich die beiden statisch bestimmten Theile, in die wir uns die ganze Construction zerlegt dachten, um gleich viel senken; wir finden daher die statisch unbestimmte Grösse Z nach § 28, indem wir die Abgeleitete der Formänderungsarbeit nach Z gleich Null setzen. Zunächst ist also A als Function von Z zu berechnen.

Wenn ein beiderseits gestützter Balken in der Mitte die Last Q trägt, ist das Biegungsmoment M auf der linken Hälfte im Abstande x vom Auflager gleich $\frac{Q}{2}x$. Die in der linken Hälfte aufgespeicherte Formänderungsarbeit berechnet sich daraus mit Vernachlässigung der Arbeit der Schubspannungen, die in solchen Fällen immer zulässig ist, nach Gl. (88). Die Formänderungsarbeit für den ganzen Balken ist doppelt so gross und daher gleich

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2}{E\Theta}\,dx = \frac{Q^2}{4E\Theta}\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{Q^2 l^3}{96 E\Theta}.$$

Für den mittleren Hauptträger haben wir hierin an Stelle von Q die Last $P - Z$, $l = l_1 = 6$ m und $\Theta = \Theta_1 = 19\,766$ cm^4 zu setzen, für jeden der beiden äusseren Hauptträger wird $Q = \frac{Z}{2}$, während die anderen Werthe bleiben und für den Querträger ist $Q = Z$, $l = l_2 = 2$ m und $\Theta = \Theta_2 = 2162$ cm^4. Im Ganzen wird daher die Formänderungsarbeit der gesammten Construction

$$A = \frac{(P-Z)^2 l_1^{\,3}}{96 E\Theta_1} + 2 \cdot \frac{\left(\frac{Z}{2}\right)^2 l_1^{\,3}}{96 E\Theta_1} + \frac{Z^2 l_2^{\,3}}{96 E\Theta_2}.$$

Die Einsetzung der Zahlenwerthe wird besser bis zuletzt vorbehalten. Durch Nullsetzen des Differentialquotienten von A nach Z erhalten wir die Bestimmungsgleichung

$$0 = -2 \cdot \frac{(P-Z) l_1^{\,3}}{96 E\Theta_1} + \frac{Z l_1^{\,3}}{96 E\Theta_1} + 2 \cdot \frac{Z l_2^{\,3}}{96 E\Theta_2}.$$

Die Auflösung nach Z liefert

$$Z = \frac{2 P l_1^{\,3}}{3 l_1^{\,3} + 2 l_2^{\,3} \frac{\Theta_1}{\Theta_2}} = 0{,}544\,P.$$

Es fragt sich jetzt, an welcher Stelle die grösste Beanspruchung des Materials zu erwarten ist. Diese kann entweder in der Mitte des mittleren Hauptträgers oder in der Mitte des Querträgers auftreten, denn die seitlichen Hauptträger sind offenbar weniger beansprucht als der in der Mitte. Das von dem mittleren Hauptträger in der Mitte aufzunehmende Biegungsmoment beträgt

$$\frac{l_1(P-Z)}{4} = 68{,}4\,P \text{ cm kg}.$$

Wenn die Spannung an dieser Stelle 1000 atm betragen soll, berechnet sich P aus der Gleichung

$$1000 = \frac{68{,}4P}{19766} \cdot 18, \quad \text{also} \quad P = 16\,000 \text{ kg}.$$

Das Biegungsmoment im Mittelquerschnitte des Querträgers ist dagegen gleich $\frac{200 \cdot 0{,}544\,P}{4} = 27{,}2\,P$, und wenn hier die zulässige Spannung von 1000 atm nicht überschritten werden soll, darf P, wie aus der Gleichung

$$1000 = \frac{27{,}2P}{2162} \cdot 10$$

folgt, nur $P = 8000$ kg betragen. Der Querträger ist also am meisten gefährdet, und wenn er auf Grund des Ergebnisses der Rechnung nicht verstärkt wird, ist nur eine Last von 8000 kg für die Construction zulässig.

24. Aufgabe. Ein I-Balken N. P. 24 ($\Theta = 4288$ cm^4) überbrückt eine Spannweite von 2 m. Wie hoch darf eine Last von 400 kg auf die Mitte des Trägers herabfallen, ohne dass die Spannung von 1600 atm überschritten wird, wenn man annimmt, dass etwa 80% der lebendigen Kraft in Gestalt von Formänderungsarbeit auf den Balken übergehen und wenn der Elasticitätsmodul = 2000000 atm gesetzt wird?

Lösung. Wir berechnen zuerst die ruhende Belastung P', durch die die angenommene Spannung $\sigma = 1600$ atm hervorgerufen würde. Aus

$$\sigma = \frac{P'l}{4\Theta} \cdot e \text{ folgt dafür } P' = \frac{4\Theta\sigma}{el}.$$

Die hierbei aufgespeicherte Formänderungsarbeit ist

$$A = \left(\frac{4\Theta\sigma}{el}\right)^2 \frac{l^3}{96E\Theta} = \frac{\sigma^2 l\Theta}{6e^2E}$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerthe $\sigma = 1600$ atm, $l = 200$ cm, $\Theta = 4288$ cm^4, $e = 12$ cm und $E = 2000000$ atm

$$A = 1270 \text{ cm kg}.$$

Die Höhe h, aus der die Last herabfallen darf, folgt aus

$$0{,}8 \cdot 400 \cdot h = 1270 \text{ zu } h = 4{,}0 \text{ cm}.$$

Diese Zahl ist indessen noch nicht ganz genau, da das Gewicht von 400 kg beim Herabsinken um den dynamischen Biegungspfeil f_d auch noch eine Arbeit leistet. Eigentlich ist daher $h + f_d = 4{,}0$ cm. Der Biegungspfeil f_d ist gleich dem statischen Biegungspfeile für die Last P', also

$$f_d = \frac{P' l^3}{48 E \Theta} = \frac{\sigma l^2}{12 e E} = 0{,}22 \text{ cm}.$$

Die ursprüngliche Höhe h des Gewichtes über dem Träger darf daher nur etwa 38 mm betragen, wenn die zugelassene Spannung nicht überschritten werden soll.

25. Aufgabe. Ein Brückenträger erfuhr unter einer Einzellast von 10 t Einsenkungen, die an drei verschiedenen Stellen zu 2,0, 2,5 und 4,0 mm beobachtet wurden. An diesen drei Stellen werden nachher Lasten von 8, 12 und 6 t aufgebracht. Um wieviel senkt sich jene Stelle, die vorher als Angriffspunkt der Einzellast von 10 t gedient hatte?

Lösung. Stillschweigend ist vorausgesetzt, dass die Formänderung vollkommen elastisch ist. Nach dem Maxwell'schen Satze ist die gesuchte Durchbiegung

$$y = 8 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0{,}25 + 6 \cdot 0{,}4 = 7{,}0 \text{ mm}.$$