



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Vorlesungen über technische Mechanik**

**Föppl, August**

**Leipzig, 1900**

§. 28. Die Sätze von Castigliano.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

$$A = \frac{P^2}{2 E \Theta} \int_0^l x^2 dx = \frac{P^2 l^3}{6 E \Theta}.$$

Die Durchbiegung  $f$  des freien Endes folgt daher aus

$$\frac{1}{2} P f = \frac{P^2 l^3}{6 E \Theta} \text{ zu } f = \frac{P l^3}{3 E \Theta}.$$

Dieses Ergebniss steht in Uebereinstimmung mit dem in Gl. (82) für den Biegungspfeil eines beiderseits gestützten Balkens, der in der Mitte eine Last trägt. Der aus der Mauer vorkragende Balken verhält sich nämlich wie die Hälfte eines beiderseits gestützten von der doppelten Länge, der in der Mitte die doppelte Last trägt. In der That kann der soeben für  $f$  abgeleitete Werth auch in der Form

$$f = \frac{2 P \cdot (2l)^3}{48 E \Theta}$$

geschrieben werden, womit die Uebereinstimmung nachgewiesen ist.

Selbstverständlich kann auch hier der Einfluss der Schubspannungen auf die Durchbiegung  $f$  leicht berücksichtigt werden, indem man  $A$  nicht nach Gl. (88), sondern nach Gl. (89) berechnet. Man kommt dann wieder zu den gleichen Resultaten, wie nach dem früheren Verfahren.

### § 28. Die Sätze von Castigliano.

Es möge jetzt angenommen werden, dass eine der Lasten, die der Balken trägt, etwa die Last  $P_i$ , einen unendlich kleinen Zuwachs erfährt, während alle übrigen Lasten ungeändert bleiben. Wir wollen berechnen, um wie viel sich die Formänderungsarbeit  $A$  hierbei ändert. Das Verhältniss beider Zuwächse, also der Differentialquotient  $\frac{\partial A}{\partial P_i}$  kann auf verschiedene Art ermittelt werden, zunächst durch partielle Differentiation von Gl. (90) nach  $P_i$ . Hierbei ist zu beachten, dass jedes  $y$  von allen Lasten, die der Balken trägt, also auch von

$P_i$  abhängig ist. Das Glied  $P_1 y_1$  der Summe in Gl. (90) liefert also bei der Differentiation einen Beitrag

$$P_1 \frac{\partial y_1}{\partial P_1}$$

und ebenso bei allen anderen Gliedern, abgesehen von  $P_i y_i$  selbst. In diesem Gliede sind beide Factoren veränderlich und es trägt daher (von dem Factor  $\frac{1}{2}$  abgesehen)

$$P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_i} + y_i$$

zu dem Differentialquotienten bei. Wenn wir wieder alle Glieder von gleichem Baue durch ein Summenzeichen zusammenfassen, erhalten wir demnach

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \frac{1}{2} \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i} + \frac{1}{2} y_i. \quad (91)$$

Die Berechnung des Differentialquotienten durch Differentiiren hat den Sinn, dass wir uns  $P_i$  während des Aufbringens der Belastung stets etwas grösser denken als vorher und es gleichzeitig mit den übrigen Lasten von Null an bis auf  $P_i + dP_i$  anwachsen lassen. Anstatt dessen können wir uns aber auch zuerst alle Lasten in der früheren Grösse und dann noch nachträglich  $dP_i$  aufgebracht denken. Auf die Formänderungsarbeit kann diese Reihenfolge in der Herstellung der Belastung keinen Einfluss haben, denn in jedem Falle wird zuletzt derselbe Endzustand erreicht und die Arbeit der äusseren Kräfte muss immer im Ganzen gleich der potentiellen Energie des gebogenen Balkens sein, die nur von dem Endzustande abhängig ist. Der Schluss, dass die Reihenfolge im Aufbringen der Belastung ohne Einfluss auf die im Ganzen geleistete Arbeit ist, hängt daher, wie man sieht, wesentlich davon ab, dass diese Arbeit vollständig in Form von potentieller Energie aufgespeichert wird. Er würde also z. B. unzulässig sein, wenn während der Formänderung Reibungen an den Auflagern oder unelastische Formänderungen vorkämen. — Von der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes ist übrigens dieser Schluss, wie zugleich bemerkt werden mag, nicht abhängig;

dazu gehört nur, dass der Körper in dem früher definirten Sinne als vollkommen elastisch gelten kann. Dagegen gestaltet sich die weitere Untersuchung erheblich verschieden, jenachdem der eine oder der andere Fall vorliegt. Hier soll nur der Fall näher untersucht werden, dass das Hooke'sche Gesetz erfüllt ist.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir  $\frac{\partial A}{\partial P_i}$  auch auf dem folgenden Wege. Wenn zuerst alle Lasten  $P$  in ihrer ursprünglichen Grösse aufgebracht wurden, leisteten sie dabei die Arbeit  $A$ . Wenn jetzt  $dP_i$  hinzugefügt wird, vermehrt sich die Einsenkung  $y_1$  des Angriffspunktes der Last  $P_1$  um

$$\frac{\partial y_1}{\partial P_i} dP_i$$

und dabei leistet die Kraft  $P_1$ , die während dieser Bewegung unverändert bleibt, die Arbeit

$$P_1 \frac{\partial y_1}{\partial P_i} dP_i.$$

Dasselbe gilt für alle Lasten  $P$ , auch für  $P_i$ . Dazu kommt dann noch die Arbeit, die von  $dP_i$  selbst geleistet wird. Da dieser Lastzuwachs allmählich von 0 bis zum Endwerthe  $dP_i$  anwächst, haben wir dafür

$$\frac{1}{2} dP_i \frac{\partial y_i}{\partial P_i} dP_i.$$

Der Vergleich mit den vorigen Gliedern zeigt, dass die von  $dP_i$  selbst geleistete Arbeit unendlich klein zweiter Ordnung ist und daher gegen die nur von der ersten Ordnung unendlich kleinen Arbeiten der Kräfte  $P$  verschwindet. Nach Division mit  $dP_i$  erhalten wir demnach aus dieser Betrachtung

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i}. \quad (92)$$

Wir können noch einen dritten Weg einschlagen, um  $\frac{\partial A}{\partial P_i}$  zu berechnen. Zuerst sei nämlich auf den vorher unbelasteten Balken die Last  $dP_i$  aufgebracht. Sie leistet dabei die Arbeit

$$\frac{1}{2} dP_i \cdot \frac{\partial y_i}{\partial P_i} dP_i.$$

Dann seien alle Lasten  $P$  zugefügt, so dass sie gleichzeitig und gleichmässig von Null an bis auf ihre Endwerthe zunehmen. Dabei biegt sich der Balken weiter durch und zwar überall um ebenso viel, als wenn er vorher unbelastet gewesen wäre. Die Kräfte  $P$  leisten dabei die vorher schon mit  $A$  bezeichnete Arbeit; gleichzeitig erfährt aber der Angriffspunkt von  $dP_i$  eine weitere Senkung  $y_i$  und die zugehörige Arbeitsleistung ist gleich

$$dP_i \cdot y_i.$$

Im Ganzen haben wir daher mit Weglassung des von der zweiten Ordnung unendlich kleinen Gliedes

$$A + dA = \frac{1}{2} \sum P y + y_i dP_i,$$

woraus für den Differentialquotienten der dritte Ausdruck

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i \quad (93)$$

folgt. Diese dritte Ableitung wäre freilich entbehrlich gewesen, denn schon aus dem Vergleiche der in den Formeln (91) und (92) gefundenen Werthe geht hervor, dass

$$y_i = \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i} \quad (94)$$

sein muss, womit jene Ausdrücke in den zuletzt gefundenen übergehen.

Bei den vorausgehenden Entwicklungen sprach ich der Uebersichtlichkeit wegen immer nur von den Formänderungen, die ein Balken erfährt, wenn Lasten auf ihn gebracht werden. Nachträglich mache ich aber darauf aufmerksam, dass diese Beschränkung auf diesen einen Fall ganz entbehrlich ist: die vorausgehenden Schlussfolgerungen bleiben vielmehr Wort für Wort auf jeden Körper anwendbar, der unter dem Einflusse äusserer Kräfte vollkommen elastische Formänderungen erfährt, die dem Hooke'schen Gesetze gehorchen. Unter der zu einer Kraft  $P$  gehörigen Verschiebung  $y$  des Angriffspunktes ist

dabei nur immer jene Componente der gesammten Verschiebung zu verstehen, die in die Richtung der Kraft  $P$  fällt. Auf die Verschiebungscomponenten, die rechtwinklig zur Krafrichtung stehen, kommt es bei der Formänderungsarbeit überhaupt nicht an. Ist der Weg  $y$  entgegengesetzt zum Pfeile der Kraft gerichtet, so muss er natürlich negativ gerechnet werden.

Gl. (93) spricht den von Castigliano aufgestellten Satz aus: „Die Verschiebung des Angriffspunktes einer äusseren Kraft bei der elastischen Formänderung eines dem Hooke'schen Gesetze unterworfenen Körpers ist gleich der nach dieser Kraft genommenen partiellen Ableitung der Formänderungsarbeit.“

Diesem Satze schliesst sich ein zweiter an, der durch eine einfache Schlussfolgerung aus ihm gewonnen wird. Ist nämlich unter den äusseren Kräften eine, von der wir wissen, dass ihr Angriffspunkt keine Verschiebung erfährt, so muss für sie nach Gl. (93)

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0 \quad (95)$$

sein. Damit erhalten wir eine Gleichung, die zur Berechnung dieser Kraft, wenn deren Grösse unbekannt war, benutzt werden kann. Gerade hierauf beruht die wichtigste Anwendung dieser Betrachtungen in der Festigkeitslehre. Gewöhnlich handelt es sich dabei um die Berechnung der Auflagerkräfte von statisch unbestimmten Constructionen. Man wählt dann gewisse Componenten der Auflagerkräfte als die statisch unbestimmten Grössen des Problems aus, so dass die übrigen auf Grund der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Statik in diesen Unbekannten ausgedrückt werden können. Auch alle Biegemomente, Scheerkräfte u. s. f. lassen sich dann in den gewählten Unbekannten ausdrücken und ebenso auch die Formänderungsarbeit  $A$  nach Gl. (88) oder (89). Wenn man nun weiss, dass die Angriffspunkte der unbekanntenen Auflagercomponenten in Folge der ihnen vorgeschriebenen Auflagerbedingungen keine Verschiebungen in den Richtungen dieser Kräfte ausführen können, liefert die Anwendung von Gl. (95)

für jeden dieser Angriffspunkte eine Bedingungsgleichung und man erhält damit ebenso viele Gleichungen als Unbekannte. Man braucht dann nur noch diese Gleichungen, die alle vom ersten Grade sind, nach den Unbekannten aufzulösen.

Die Methode ist übrigens noch etwas allgemeiner, als sie bis jetzt dargestellt wurde. Es ist nämlich nicht nöthig, dass etwa  $P_i$  nur eine Einzelkraft bezeichne: es kann auch irgend eine Gruppe von äusseren Kräften vorstellen, wenn nur unter  $y_i$  eine Verschiebungsgrösse verstanden wird, durch deren Multiplication mit  $P_i$  (oder dem Mittelwerthe von  $P_i$  bei allmählichem Aufbringen der Belastung) die geleistete Arbeit gefunden wird. Auch durch diese Erweiterung wird an den früheren Schlüssen gar nichts geändert.

Häufig ist es nämlich zweckmässig, ein Kräftepaar an einer Auflagerstelle, an der der Träger eingespannt wird, als statisch unbestimmte Grösse in die Rechnung einzuführen. Die Arbeit eines Kräftepaars hängt aber von der Drehung ab, die die Angriffsstelle im Sinne der Axe des Kräftepaars erfährt und unter dem zugehörigen  $y$  ist daher in diesem Falle der Drehungswinkel zu verstehen. Wenn man weiss, dass der Träger an dieser Stelle fest eingespannt ist, der Drehungswinkel also verschwinden muss, erhält man auch in diesem Falle die Bedingungsgleichung (95), in der jetzt unter  $P_i$  das unbekannte Auflagermoment zu verstehen ist.

Aber auch nach einer zweiten Richtung ist diese Betrachtung noch einer Erweiterung fähig. Es ist zur Durchführung der Berechnung der statisch unbestimmten Grössen oft nützlich, eine Construction in zwei (oder mehr) Theile zu zerlegen. Gewöhnlich führt man diese Zerlegung in solcher Weise aus, dass jeder Theil für sich genommen einen statisch bestimmten Träger bilden würde. Man muss dann nur die an der Verbindungsstelle zwischen beiden Trägertheilen in Wirklichkeit übertragenen inneren Kräfte als äussere Kräfte, also als Belastungen der beiden Theilstücke betrachten. Diese treten dann als die statisch unbestimmten Grössen des Problems auf und auch für sie gilt Gl. (95).

Um dies zu erkennen, bedenke man, dass die ganze Formänderungsarbeit  $A$  hier in zwei Theile zerlegt werden kann

$$A = A_1 + A_2, \quad (96)$$

so dass  $A_1$  die im ersten Theilstücke aufgespeicherte potentielle Energie bezeichnet und ebenso  $A_2$  die im anderen Theilstücke. Bedeutet nun  $P_i$  eine von dem zweiten Theilstücke auf das erste an der Verbindungsstelle übertragene unbekannte Kraft oder ein eben solches Moment, so hat man für den ersten Theil nach Gl. (93)

$$y_i = \frac{\partial A_1}{\partial P_i},$$

und dieselbe Gleichung lässt sich auch auf das zweite Theilstück anwenden. Wenn man nun weiss, dass die beiden Theile so miteinander zusammenhängen, dass die Verschiebungsgrösse  $y_i$  für beide gleich gross sein muss, so liefert dies die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial A_1}{\partial P_i} = - \frac{\partial A_2}{\partial P_i}.$$

Das Minuszeichen auf der rechten Seite war nämlich nöthig, weil am zweiten Trägertheile nach dem Gesetze der Action und Reaction die statisch unbestimmte Grösse gleich  $-P_i$  ist. Aus Gl. (96) folgt daher auch in diesem Falle

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \frac{\partial A_1}{\partial P_i} + \frac{\partial A_2}{\partial P_i} = 0.$$

Wir können jetzt alle diese Betrachtungen zu dem andern von Castigliano herrührenden Satze zusammenfassen:

„Die partiellen Ableitungen der Formänderungsarbeit eines dem Hooke'schen Gesetze unterworfenen Körpers nach den statisch unbestimmten Kräften, die so ausgewählt sind, dass sie selbst keine Arbeit leisten, sind gleich Null und aus den sich hieraus ergebenden Bedingungsgleichungen können die statisch unbestimmten Kräfte selbst berechnet werden.“

Gewöhnlich gibt man diesem Satze noch eine etwas andere Form, die zwar für die practische Anwendung nichts Neues

lehrt, die sich aber durch die gedrängte Art der Aussage dem Gedächtnisse besser einprägen lässt. Die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0$$

ist nämlich eine nothwendige Bedingung dafür, dass  $P_i$  so gewählt sei, um  $A$  entweder zu einem Maximum oder zu einem Minimum zu machen. Um zu erkennen, ob der eine oder der andere Fall vorliegt, bilden wir den zweiten Differentialquotienten. Mit Rücksicht auf Gl. (93) erhält man dafür

$$\frac{\partial^2 A}{\partial P_i^2} = \frac{\partial y_i}{\partial P_i}.$$

Der Werth auf der rechten Seite ist aber nothwendig positiv, denn eine Vermehrung irgend einer äusseren Kraft  $P_i$  um  $dP_i$  kann nur eine Verschiebung  $dy_i$  ihres Angriffspunktes in der gleichen Richtung mit  $dP_i$  zur Folge haben. In der That ist also  $A$  ein Minimum.

Mit Rücksicht hierauf kann man den vorhergehenden Satz auch in der Form aussprechen:

„Die statisch unbestimmten Grössen machen die Formänderungsarbeit zu einem Minimum.“

Er wird daher auch als der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit bezeichnet. Dabei muss aber, wie nochmals hervorgehoben werden soll, beachtet werden, dass die Minimumeigenschaft selbst bei den Anwendungen des Satzes gar keine Rolle spielt, sondern dass es dabei immer nur auf die Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0$$

ankommt.

Zur Erläuterung des Rechenverfahrens soll noch ein einfaches Beispiel behandelt werden. Ich wähle dazu einen Balken, der über zwei Oeffnungen von ungleicher Grösse reicht und eine über die ganze Länge gleichmässig vertheilte Belastung  $q$  auf die Längeneinheit trägt. Als statisch unbestimmte Grösse wählen wir den Auflagerdruck  $Z$  (vgl. Abb. 39) an der Mittel-

stütze. Für die Auflagerkräfte  $B$  und  $C$  folgt dann aus den Gleichgewichtsbedingungen für den ganzen Balken

$$B = \frac{q(a+b)}{2} - \frac{Zb}{a+b}; \quad C = \frac{q(a+b)}{2} - Z \frac{a}{a+b}.$$

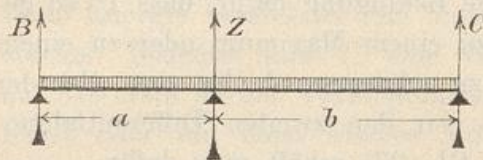


Abb. 39.

Für das Biegemoment in der ersten Oeffnung hat man

$$M_I = Bx - \frac{qx^2}{2}.$$

Diesen Werth setzen wir in den Ausdruck (88) für die Formänderungsarbeit ein. Das Trägheitsmoment des Balkens und der Elasticitätsmodul  $E$  sind stillschweigend als constant über die ganze Balkenlänge vorausgesetzt; es handelt sich also nur darum, das Integral

$$\int M^2 dx$$

auszuführen. Dies wird hier für die erste Oeffnung

$$\int_0^a (B^2 x^2 - Bq x^3 + \frac{q^2 x^4}{4}) dx = B^2 \frac{a^3}{3} - Bq \frac{a^4}{4} + q^2 \frac{a^5}{20}.$$

Dazu kommt der Beitrag der zweiten Oeffnung, der durch eine Rechnung von derselben Art festgestellt werden kann. Einfacher ist es aber hier, darauf aufmerksam zu machen, dass jede Oeffnung bei geeigneter Aufstellung des Beobachters als die links liegende angesehen werden kann und dass der soeben berechnete Werth unmittelbar auch für die andere Oeffnung benutzt werden kann, wenn man darin  $B$  mit  $C$  und  $a$  mit  $b$  vertauscht. Im Ganzen erhält man daher für die Formänderungsarbeit des durchlaufenden Balkens

$$A = \frac{1}{2E\Theta} \left\{ \frac{B^2 a^3}{3} - \frac{Bq a^4}{4} + \frac{q^2 a^5}{20} + \frac{C^2 b^3}{3} - \frac{Cq b^4}{4} + \frac{q^2 b^5}{20} \right\}.$$

Dieser Ausdruck wird durch den gesuchten Werth der Unbekannten  $Z$  zu einem Minimum gemacht oder mit anderen Worten, der Differentialquotient des Ausdrucks nach  $Z$  ist gleich Null zu setzen. Bei der Ausführung der Differentiation ist zu beachten, dass  $Z$  nur in  $B$  und  $C$  vorkommt, deren

Abhängigkeit von  $Z$  schon vorher festgestellt wurde. Man erhält

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{1}{2E\Theta} \left\{ \left( \frac{2Ba^3}{3} - \frac{qa^4}{4} \right) \frac{\partial B}{\partial Z} + \left( \frac{2Cb^3}{3} - \frac{qb^4}{4} \right) \frac{\partial C}{\partial Z} \right\}.$$

Setzt man dies gleich Null und führt für  $B$  und  $C$  ihre Werthe ein, ebenso für die Differentialquotienten die daraus hervorgehenden

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -\frac{b}{a+b}; \quad \frac{\partial C}{\partial Z} = -\frac{a}{a+b},$$

so findet man die Bedingungsgleichung

$$0 = -\frac{b}{a+b} \left( \frac{2a^3}{3} \left[ \frac{q(a+b)}{2} - Z \frac{a}{a+b} \right] - \frac{qa^4}{4} \right) - \frac{a}{a+b} \left( \frac{2b^3}{3} \left[ \frac{q(a+b)}{2} - Z \frac{a}{a+b} \right] - \frac{qb^4}{4} \right),$$

deren Auflösung den Werth der statisch unbestimmten Grösse  $Z$  liefert. Man erhält

$$Z = q \cdot \frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2 + b^3}{8ab}.$$

Wenn man  $a = b$  setzt, geht dies in  $Z = \frac{5}{4}qa$  über, was wir für diesen besonderen Fall schon in § 25 gefunden haben.

Auch die Anwendung des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit macht, wie schon aus diesem einfachen Beispiele hervorgeht, die Durchführung längerer Rechnungen nöthig. In dieser Hinsicht ist die Methode der älteren kaum überlegen; ihr Hauptvorteil besteht darin, dass sie eine einfache Vorschrift für den ganzen Rechnungsgang aufstellt, die den Rechner der Mühe des Nachdenkens so ziemlich enthebt. Die Rechnung spielt sich in allen Fällen ungefähr in derselben Weise ab und stellt während ihrer Abwicklung die möglichst geringen Anforderungen an eine höhere geistige Thätigkeit. Nur weil der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit bei seiner Anwendung zugleich ein Minimum von Gedankenarbeit erfordert, ist er heute zu der Bedeutung eines der wichtigsten Sätze der technischen Mechanik gelangt. Uebrigens soll in dieser Bemerkung durchaus nicht etwa irgend ein Vorwurf enthalten sein; vielmehr geht das Streben der

Wissenschaft stets auf eine Ersparung von Gedankenarbeit hinaus und jede Aenderung der früheren Darstellung, die hierzu verhilft, bildet einen wichtigen Fortschritt.

### § 29. Stossweise Belastung.

Bei allen vorausgehenden Berechnungen der Formänderungsarbeit ist angenommen worden, dass die Belastung ganz allmählich von Null an auf ihren Höchstwerth gesteigert wird. Dies war nöthig, um auszuschliessen, dass ein merklicher Theil der von der äusseren Kraft geleisteten Arbeit zur Beschleunigung der Masse des belasteten Körpers verwendet, also in kinetische Energie umgesetzt wird. Diese Untersuchungen bedürfen aber jetzt noch einer Ergänzung. Die allmähliche Steigerung der Belastung bildet zwar in Wirklichkeit die Regel; man kann es aber durch geeignete Vorrichtungen offenbar auch erreichen, dass die Last plötzlich aufgebracht wird und von Anbeginn der Belastung an mit ihrer vollen Grösse auf den Träger einwirkt. Den Weg des Angriffspunktes der Belastung während der elastischen Formänderung bis zum grössten Ausschlage und in der Richtung der Kraft gemessen, wollen wir der Kürze halber in diesem Falle den dynamischen Biegungspfeil nennen und ihn mit  $f_a$  bezeichnen, obschon die ganze Betrachtung nicht nur für den Fall der Biegung, sondern für jeden Belastungsfall gültig ist. Die Arbeit der Last  $P$  ist dann gleich

$$P f_a$$

zu setzen, da hier der Factor  $\frac{1}{2}$  fortfällt. Zunächst sieht man ein, dass  $f_a$  grösser sein muss, als der früher berechnete statische Biegungspfeil  $f_s$ , der zu derselben Last  $P$  im Gleichgewichtszustande gehören würde. Denn wenn die elastische Formänderung bis zu  $f_s$  vorgeschritten ist, hat  $P$  schon eine Arbeit  $P f_s$  geleistet, die nach den früheren Untersuchungen doppelt so gross ist als die bei dieser Formänderung aufgespeicherte potentielle Energie. Die andere Hälfte der geleisteten Arbeit muss sich daher — unter der Voraussetzung,