



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Vorlesungen über technische Mechanik**

**Föppl, August**

**Leipzig, 1900**

§. 27. Die potentielle Energie eines gebogenen Stabes.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

## Vierter Abschnitt.

### Die Formänderungsarbeit.

#### § 27. Die potentielle Energie eines gebogenen Stabes.

Wenn man annimmt, dass die Schubspannungen neben den Normalspannungen nicht in Betracht kommen, oder wenn es sich um den Fall der reinen Biegungsbeanspruchung handelt, hat man für die spezifische Formänderungsarbeit nach Gl. (41)

$$A = \frac{\sigma^2}{2E}$$

und für  $\sigma$  kann nach Gl. (48)

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y$$

gesetzt werden. Setzt man dies ein, multiplicirt  $A$  mit dem Volumenelemente  $d\tau$  und integrirt über das Volumen eines Balkenelementes von der Länge  $dx$ , so erhält man für die in diesem Balkenelemente aufgespeicherte Formänderungsarbeit  $dA$  den Ausdruck

$$dA = \int \frac{M^2}{2E\Theta^2} y^2 d\tau.$$

Für  $d\tau$  kann man aber  $dx \cdot dF$  setzen. Der Factor  $dx$  kann vor das Integralzeichen gesetzt werden, ebenso  $M$ ,  $E$  und  $\Theta$ , und man erhält

$$dA = \frac{M^2}{2E\Theta^2} dx \int y^2 dF.$$

Das verbliebene Integral stellt aber das Trägheitsmoment des Querschnitts dar; der Ausdruck vereinfacht sich daher zu

$$dA = \frac{M^2}{2E\Theta} dx. \quad (87)$$

Zu demselben Ausdrucke kann man auch noch auf einem anderen Wege gelangen. Betrachtet man nämlich nur das eine Balkenelement während der Formänderung, so sind die an den beiden Querschnittsflächen auftretenden Normalspannungen äussere Kräfte für dieses Körperstück und die von ihnen geleistete Arbeit muss gleich der in dem Stücke aufgespeicherten potentiellen Energie sein. Eine Bewegung des Körperstücks als Ganzes kommt dabei nicht in Betracht, da sich die äusseren Kräfte daran im Gleichgewichte halten, die bei einer solchen Bewegung von ihnen geleistete Arbeit daher gleich Null ist. Wir brauchen uns daher nur um die relativen Bewegungen innerhalb des Körperelements zu kümmern. Am einfachsten geben wir uns über diese Rechenschaft, wenn wir uns den einen Querschnitt festgehalten denken. Der andere Querschnitt führt dann gegen diesen eine Drehung um den Winkel  $d\varphi$  aus, der in Gl. (76) zu

$$d\varphi = \frac{M}{E\Theta} dx$$

berechnet ist. Die Normalspannungen an dem festgehaltenen Querschnitte leisten während dieser Bewegung keine Arbeit, da ihre Angriffspunkte in Ruhe bleiben. Am anderen Querschnitte können wir uns die Normalspannungen zu einem Kräftepaare vereinigt denken, dessen Moment gleich dem Biegemomente  $M$  ist. Die Arbeit bei der Drehung ist daher

$$dA = \frac{1}{2} M d\varphi = \frac{M^2}{2E\Theta} dx,$$

wie schon vorher gefunden war. Der Factor  $\frac{1}{2}$  musste hier wieder deshalb beigefügt werden, weil das Moment nicht während der ganzen Bewegung dieselbe Grösse  $M$  hat, sondern von Null an proportional mit der schon ausgeführten Formänderung bis auf den Endwerth  $M$  anwächst. Als Mittelwerth des Moments während der ganzen Drehung ist daher  $\frac{1}{2} M$  einzuführen.

Die in dem ganzen Balken aufgespeicherte Formänderungsarbeit  $A$  ist demnach

$$A = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{E\Theta} dx. \quad (88)$$

Wenn die Arbeit der Schubspannungen nicht vernachlässigt werden soll, muss hierzu noch ein Glied gefügt werden, das aus den Entwicklungen in § 24 unmittelbar entnommen werden kann. Man muss dabei beachten, dass die Schubspannungen bei der Drehung der beiden Querschnitte gegeneinander keine Arbeit leisten, da die Wege der Angriffspunkte hierbei senkrecht zur Krafrichtung stehen, während umgekehrt bei der Schiebung des einen Querschnitts relativ zum anderen die Bewegung senkrecht zu den Normalspannungen erfolgt, so dass hierbei nur die Schubspannungen Arbeit leisten. In der That wird daher die ganze Formänderungsarbeit für ein Balkenelement durch einfache Summirung der beiden Werthe erhalten, von denen sich der eine nur auf die Drehung und die Normalspannungen, der andere nur auf die Schiebung und die Schubspannungen bezieht. Für ein Balkenelement war die Arbeit der Schubspannungen in § 24 zu

$$\frac{1}{2} V du = \alpha \frac{V^2}{2GF} dx$$

gefunden. Mit Rücksicht auf die Schubspannungen wird daher die ganze im gebogenen Balken aufgespeicherte Formänderungsarbeit zu

$$A = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{E\Theta} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\alpha V^2}{GF} dx \quad (89)$$

erhalten.

Wenn etwa neben der Bieungsbeanspruchung noch eine axiale Belastung des Stabes vorkommen sollte, muss dazu noch ein drittes Glied gefügt werden. An dieser Stelle soll aber auf solche Fälle nicht weiter eingegangen werden.

Die im Stabe aufgespeicherte potentielle Energie muss auch gleich der von den äusseren Kräften, also von den Lasten, während der Formänderung geleisteten Arbeit sein. Hierdurch sind wir in den Stand gesetzt, noch einen zweiten Ausdruck für  $A$  aufzustellen, den wir dem vorigen gleich setzen können. Die Auflagerkräfte leisten bei der Formänderung keine Arbeit. Ihre Angriffspunkte sind nämlich entweder vollständig festgehalten oder, wenn ein Angriffspunkt längs einer

Auflagerbahn beweglich ist, steht die Verschiebung, die er erfährt, senkrecht zur Richtung der Auflagerkraft; in beiden Fällen ist also die Arbeit gleich Null. Nur dann, wenn etwa ein Auflagerpunkt längs eines Gleitlagers verschieblich sein sollte, in dem eine Reibung von merklichem Betrage zu überwinden wäre, käme die Arbeit dieser Reibung in Betracht. Dieser Fall soll aber bei allen Betrachtungen dieses Abschnittes ausdrücklich ausgeschlossen werden; nur unter dieser Voraussetzung gelten, wie wohl zu beachten ist, die hier abzuleitenden Sätze streng.

Wir brauchen also nur die Arbeiten zu beachten, die von den Lasten geleistet werden. Eine dieser Lasten sei mit  $P$ , die in ihrer Richtung erfolgende Verschiebung ihres Angriffspunktes mit  $y$  bezeichnet. Wegen des allmählichen Anwachsens von  $P$  während der Durchbiegung des Balkens ist die Arbeit gleich  $\frac{1}{2}Py$  zu setzen\*) und wir haben daher auch

$$A = \frac{1}{2} \sum Py, \quad (90)$$

wobei die Summirung über alle Lasten zu erstrecken ist. Bei gleichförmig vertheilten Lasten tritt an die Stelle der Summirung eine Integration.

Wenn der Balken nur eine einzige Last trägt, kann die Gleichsetzung der Ausdrücke (90) und (88) oder (89) zur Berechnung der Verschiebung des Angriffspunktes der Last benutzt werden. Dies möge an dem Beispiele eines Balkens, der an einen Ende eingemauert ist und am freien Ende eine Last  $P$  trägt, erläutert werden. Im Abstände  $x$  vom freien Ende ist  $M = Px$ . Wenn wir den Einfluss der Schubkräfte auf die Durchbiegung vernachlässigen, erhalten wir  $A$  nach Gl. (88)

\*) Dies gilt freilich nur unter der Voraussetzung, dass die Einsenkungen proportional mit den Lasten wachsen, also für den Fall, dass das Hooke'sche Gesetz erfüllt ist. Bei der ersten Auflage des Buches habe ich dies übersehen, wodurch in die weiteren Entwicklungen einige unrichtige Bemerkungen kamen. Diese sind jetzt beseitigt.

$$A = \frac{P^2}{2 E \Theta} \int_0^l x^2 dx = \frac{P^2 l^3}{6 E \Theta}.$$

Die Durchbiegung  $f$  des freien Endes folgt daher aus

$$\frac{1}{2} P f = \frac{P^2 l^3}{6 E \Theta} \text{ zu } f = \frac{P l^3}{3 E \Theta}.$$

Dieses Ergebniss steht in Uebereinstimmung mit dem in Gl. (82) für den Biegungspfeil eines beiderseits gestützten Balkens, der in der Mitte eine Last trägt. Der aus der Mauer vorkragende Balken verhält sich nämlich wie die Hälfte eines beiderseits gestützten von der doppelten Länge, der in der Mitte die doppelte Last trägt. In der That kann der soeben für  $f$  abgeleitete Werth auch in der Form

$$f = \frac{2 P \cdot (2l)^3}{48 E \Theta}$$

geschrieben werden, womit die Uebereinstimmung nachgewiesen ist.

Selbstverständlich kann auch hier der Einfluss der Schubspannungen auf die Durchbiegung  $f$  leicht berücksichtigt werden, indem man  $A$  nicht nach Gl. (88), sondern nach Gl. (89) berechnet. Man kommt dann wieder zu den gleichen Resultaten, wie nach dem früheren Verfahren.

### § 28. Die Sätze von Castigliano.

Es möge jetzt angenommen werden, dass eine der Lasten, die der Balken trägt, etwa die Last  $P_i$ , einen unendlich kleinen Zuwachs erfährt, während alle übrigen Lasten ungeändert bleiben. Wir wollen berechnen, um wie viel sich die Formänderungsarbeit  $A$  hierbei ändert. Das Verhältniss beider Zuwächse, also der Differentialquotient  $\frac{\partial A}{\partial P_i}$  kann auf verschiedene Art ermittelt werden, zunächst durch partielle Differentiation von Gl. (90) nach  $P_i$ . Hierbei ist zu beachten, dass jedes  $y$  von allen Lasten, die der Balken trägt, also auch von