Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Zusammenfassung mehrerer Aeste der elastischen Linie durch eine einzige Gleichung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

Dieser muss nämlich der Symmetrie wegen in der Mitte eine horizontale Tangente haben. In

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{4} + C$$

muss daher die rechte Seite für $x = \frac{l}{2}$ verschwinden, also $C = \frac{Pl^2}{16}$ gesetzt werden.

Für die andere Integrationsconstante C_1 erhält man wie vorher $C_1 = 0$, weil y für $x = 0$ verschwinden muss. Für den linken Ast der elastischen Linie hat man daher schliesslich die Gleichung

$$E\Theta y = \frac{Pl^2 x}{16} - \frac{Px^3}{12}. \tag{81}$$

Mit $x = \frac{l}{2}$ erhält man für den Biegungspfeil f

$$f = \frac{Pl^3}{48 E\Theta}, \tag{82}$$

eine bei den Anwendungen sehr häufig gebrauchte Formel.

Trägt der Balken zwei Einzellasten P_1 und P_2 in den Abständen p_1 und p_2 vom linken Auflager, so zerfällt die elastische Linie in drei sich stetig und ohne Knick aneinander schliessende Aeste. Man berechnet zunächst die Auflagerkräfte. Wird der Auflagerdruck am linken Ende mit A bezeichnet, so hat man

$$M_{\mathrm{I}} = Ax; \quad M_{\mathrm{II}} = Ax - P_1(x - p_1);$$
$$M_{\mathrm{III}} = Ax - P_1(x - p_1) - P_2(x - p_2).$$

Von diesen Ausdrücken gilt M_{I} zwischen $x = 0$ und $x = p_1$, der zweite zwischen $x = p_1$ und $x = p_2$ und der dritte zwischen $x = p_2$ und $x = l$. Man hat der Reihe nach jeden dieser Ausdrücke in die Gleichung der elastischen Linie einzusetzen und diese jedesmal zu integriren. Dadurch erhält man die endlichen Gleichungen der drei Aeste, in denen zusammen sechs unbekannte Integrationsconstanten auftreten. Zu deren Bestimmung hat man zunächst die beiden Bedingungen, dass y an den beiden Auflagerstellen zu Null werden muss. Ausserdem muss an jeder Uebergangsstelle y und $\frac{dy}{dx}$ für beide Aeste gleich werden. Dadurch erhält man nochmals vier Bedingungsgleichungen, die mit den vorigen zusammen zur Ermittelung der Constanten genügen.

Dasselbe Verfahren bleibt auch noch anwendbar, wenn der Balken drei oder beliebig viele Einzellasten trägt. Es macht dann freilich an sich zwar ganz einfache, durch den Umfang, den sie annehmen, aber sehr lästige Rechnungen zur Bestimmung der verschiedenen Integrationsconstanten der einzelnen Aeste nöthig. In solchen Fällen kann man sich aber dadurch helfen, dass man die Gleichungen für die einzelnen Aeste der elastischen Linie in geeigneter Weise zusammenfasst. Für den schon vorher besprochenen Fall, dass der Balken zwei Einzellasten P_1 und P_2 trägt, kann man nämlich die drei dort aufgestellten Ausdrücke für die Biegungsmomente M_{I} M_{II} M_{III} in den drei Balkenabschnitten in der einzigen Form

$$M = \underset{\mathrm{I}}{Ax\ ,} - \underset{\mathrm{II}}{P_1(x - p_1)\ ,} - \underset{\mathrm{III}}{P_2(x - p_2)}$$

zur Darstellung bringen. Durch die Bezeichnung I, II, III, die unten beigefügt ist, wird vorgeschrieben, wie weit der Ausdruck zu entwickeln ist, wenn man sich im ersten, zweiten oder dritten Abschnitte der Balkenlänge befindet. Auf die Nothwendigkeit, den Ausdruck an der geeigneten Stelle abzubrechen, wird überdies durch das hinter jedes Glied und vor das Vorzeichen des nächsten gesetzte Komma hingewiesen.

Setzen wir diesen Ausdruck in die Differentialgleichung der elastischen Linie ein, so erhalten wir diese ebenfalls sofort für alle drei Aeste in der gleichen Art der Zusammenfassung, nämlich

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \underset{\mathrm{I}}{-Ax\ ,} + \underset{\mathrm{II}}{P_1(x - p_1)\ ,} + \underset{\mathrm{III}}{P_2(x - p_2)\ .}$$

Integriren wir diese Gleichung einmal, so finden wir

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = C - \underset{\mathrm{I}}{A\frac{x^2}{2}\ ,} + \underset{\mathrm{II}}{P_1\frac{(x - p_1)^2}{2}\ ,} + \underset{\mathrm{III}}{P_2\frac{(x - p_2)^2}{2}\ .}$$

Hierbei bedeutet C eine Integrations-Constante. Eigentlich wäre für jeden Ast eine besondere willkürliche Integrations-Constante anzunehmen gewesen. Wenn wir aber, wie es bereits durch die Art der Anschreibung ausgedrückt wird, C als den gleichen Werth für alle drei Aeste betrachten, so sind damit zwei willkürliche Integrations-Constanten bereits so bestimmt, dass die drei Aeste der elastischen Linie sich ohne Knick aneinander schliessen. In der That erkennen wir nämlich, dass mit dieser Verfügung über die Integrations-Constanten an den Grenzen der Gebiete I und II und II und III keine sprungweise Aenderung von $\frac{dy}{dx}$ vorkommt. Sobald wir das Gebiet I verlassen und in das Gebiet II eintreten, haben wir zwar noch ein neues Glied in der Gleichung zu berücksichtigen. An der Stelle $x = p_1$, also an der Grenze selbst, wird dies Glied aber zu Null und es ist daher gleichgültig, ob wir die Grenzstelle noch zum Gebiete I oder schon zum Gebiete II rechnen; an dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ wird dadurch nichts geändert und die vorgeschriebene Grenzbedingung ist erfüllt. Auf diesem Umstande, dass sich die Integrations-Constanten ohne Weiteres von selbst den Grenzbedingungen anpassen, beruht der Vortheil des Verfahrens.

Eine zweite Integration liefert

$$E\Theta y = Cx + C_1 - A\frac{x^3}{6}\underset{\mathrm{I}}{,} + P_1\frac{(x-p_1)^3}{6}\underset{\mathrm{II}}{,} + P_2\frac{(x-p_2)^3}{6}\,{}_{\mathrm{III}}$$

und auch hier tritt nur eine, für alle Aeste gemeinsame, neue Integrations-Constante C_1 hinzu, während zugleich an den Grenzen die Bedingungen erfüllt sind, dass sich y nicht sprungweise ändern kann. Die weitere Behandlung der Gleichung und die Ermittelung der beiden Integrations-Constanten C und C_1 aus den Bedingungen an den Enden des ganzen Balkens kann nun genau so erfolgen, als wenn es sich um eine elastische Linie mit nur einem einzigen Aste handelte.

Besser freilich als die Rechnung eignet sich in solchen Fällen das graphische Verfahren zur Ermittelung der Gestalt der elastischen Linie, worüber man im II. Bande Näheres finden wird.

Aehnlich liegt der Fall, wenn der Balken zwar nur eine stetig vertheilte Belastung oder eine einzige Last in der Mitte trägt, der Querschnitt aber nicht constant ist, sondern in verschiedenen Absätzen wechselt, wie es z. B. bei Blechbalken vorkommt, deren Querschnitt nach der Mitte zu durch Aufnieten von Gurtungsplatten verstärkt wird. Auch dann setzt sich die elastische Linie aus einer Anzahl verschiedener Aeste zusammen. Verändert sich der Querschnitt stetig, so ist Θ als Function von x in die Differentialgleichung einzusetzen. Insofern die Ausführung der Integration dadurch nicht erschwert oder unmöglich gemacht wird, erleidet das Verfahren hierdurch keine Aenderung. Der practisch wichtigste Fall bleibt aber immer der des Balkens von constantem Querschnitte; man behilft sich häufig damit, die für diesen aufgestellten Formeln näherungsweise auch für andere Fälle anzuwenden, weil man die umständlichere Rechnung, die diese erfordern würden, scheut und man sich sehr oft mit einer ungefähren Schätzung des Biegungspfeiles begnügen kann.

Die vorausgehenden Rechnungen beruhen auf der stillschweigenden Voraussetzung, dass die Kraftebene durch eine Hauptaxe des Querschnitts geht. Trifft dies nicht zu, so hat man die Lasten, wie in § 16, in Componenten nach den Richtungen der Hauptaxen zu zerlegen und die Biegungslinie für die Componenten in beiden Ebenen zu ermitteln. Die gesammte Formänderung ergibt sich durch geometrische Summirung der zu diesen beiden Componentensystemen gehörigen elastischen Verschiebungen.

§ 24. **Einfluss der Schubspannungen auf die Biegungslinie.**

Bei den vorausgehenden Betrachtungen ist noch keine Rücksicht auf die Formänderungen genommen, die durch die Schubspannungen bewirkt werden. Diese haben zur Folge, dass der Biegungspfeil noch etwas vergrössert wird und dass überhaupt die elastische Linie von der vorher berechneten Gestalt ein wenig abweicht.