



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Biegungspfeil.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

Von besonderem Interesse ist der Werth der Einsenkung y in der Balkenmitte, also zugleich der grösste Werth, den y annimmt. Man nennt diese Strecke den Biegungspfeil, der hier stets mit dem Buchstaben f bezeichnet werden soll. Mit $x = \frac{l}{2}$ erhält man aus Gl. (79)

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{E\Theta} = \frac{5}{384} \frac{Ql^3}{E\Theta}. \quad (80)$$

In der letzten Form dieser Gleichung ist unter Q die Gesamtbelastung des Balkens, also ql zu verstehen.

Zweitens sei ein Balken betrachtet, der in der Mitte der Spannweite eine Einzellast P trägt. Man hat hier

$$M = \frac{P}{2} x$$

und daher

$$E\Theta \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Px}{2}$$

oder nach zweimaliger Integration

$$E\Theta y = -\frac{Px^3}{12} + Cx + C_1.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten muss aber hier ein anderes Verfahren eingeschlagen werden. Der Ausdruck $\frac{P}{2} x$ für M ist nämlich nur für solche Querschnitte gültig, die links von der Mitte liegen; rechts davon wäre

$$M = \frac{P}{2} x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{P(l-x)}{2}$$

zu setzen. Infolgedessen gilt auch die vorausgehende endliche Gleichung nur für die linke Hälfte der elastischen Linie. Diese Linie selbst setzt sich aus zwei Aesten zusammen, die sich in der Mitte stetig und ohne Knick aneinander schliessen, die aber zu verschiedenen Bildungsgesetzen gehören. Hier wird die Lösung dadurch vereinfacht, dass die Last in der Mitte angenommen wurde. Dadurch sind beide Aeste der elastischen Linie symmetrisch zueinander gestaltet und symmetrisch gelegen und es genügt, den einen Ast zu betrachten.

Dieser muss nämlich der Symmetrie wegen in der Mitte eine horizontale Tangente haben. In

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{4} + C$$

muss daher die rechte Seite für $x = \frac{l}{2}$ verschwinden, also $C = \frac{Pl^2}{16}$ gesetzt werden.

Für die andere Integrationskonstante C_1 erhält man wie vorher $C_1 = 0$, weil y für $x = 0$ verschwinden muss. Für den linken Ast der elastischen Linie hat man daher schliesslich die Gleichung

$$E\Theta y = \frac{Pl^2x}{16} - \frac{Px^3}{12}. \quad (81)$$

Mit $x = \frac{l}{2}$ erhält man für den Biegungepfeil f

$$f = \frac{Pl^3}{48E\Theta}, \quad (82)$$

eine bei den Anwendungen sehr häufig gebrauchte Formel.

Trägt der Balken zwei Einzellasten P_1 und P_2 in den Abständen p_1 und p_2 vom linken Auflager, so zerfällt die elastische Linie in drei sich stetig und ohne Knick aneinander schliessende Aeste. Man berechnet zunächst die Auflagerkräfte. Wird der Auflagerdruck am linken Ende mit A bezeichnet, so hat man

$$M_I = Ax; \quad M_{II} = Ax - P_1(x - p_1); \\ M_{III} = Ax - P_1(x - p_1) - P_2(x - p_2).$$

Von diesen Ausdrücken gilt M_I zwischen $x = 0$ und $x = p_1$, der zweite zwischen $x = p_1$ und $x = p_2$ und der dritte zwischen $x = p_2$ und $x = l$. Man hat der Reihe nach jeden dieser Ausdrücke in die Gleichung der elastischen Linie einzusetzen und diese jedesmal zu integrieren. Dadurch erhält man die endlichen Gleichungen der drei Aeste, in denen zusammen sechs unbekannte Integrationskonstanten auftreten. Zu deren Bestimmung hat man zunächst die beiden Bedingungen, dass y an den beiden Auflagerstellen zu Null werden muss. Ausserdem muss an jeder Uebergangsstelle y und $\frac{dy}{dx}$ für beide Aeste