Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Momentenfläche.

von gleich $\frac{x}{2}$. Das Biegungsmoment ist über die ganze Spannweite positiv und wird an den beiden Auflagern zu Null. Denkt man sich M in jedem Punkte der Stabaxe rechtwinklig dazu in irgend einem Maassstabe aufgetragen, so erhält man eine Parabel. Allgemein heisst die in dieser Weise gefundene Curve die zu der gegebenen Belastung gehörige Momentencurve und die zwischen ihr und der Stabaxe eingeschlossene Fläche die Momentenfläche.

Mit dem hier festgestellten Werthe von M geht Gl. (78) über in

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2}.$$

Nach zweimaliger Integration erhält man daraus

$$E\Theta y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + Cx + C_1,$$

wenn mit C und C_1 die beiden Integrationsconstanten bezeichnet werden. Nun muss nach den Bedingungen der Aufgabe y zu Null werden für $x = 0$ und für $x = l$, da beide Enden des Balkens durch die Auflagerung gegen verticale Bewegungen geschützt sind. Die erste Bedingung lehrt, dass die Constante C_1 gleich Null zu setzen ist. Zur Ermittelung von C haben wir die Gleichung

$$0 = \frac{ql^4}{24} - \frac{ql^4}{12} + Cl, \quad \text{also} \quad C = \frac{ql^3}{24},$$

und für die Gleichung der elastischen Linie in endlicher Form folgt daher

$$E\Theta y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{ql^3x}{24}. \tag{79}$$

Die Linie ist also vom vierten Grade. Es mag noch erwähnt werden, dass sich die hier analytisch vorgenommene Integration allgemein auch mit Hülfe einer geometrischen Construction, nämlich mit Hülfe eines Seilpolygons, ausführen lässt. Diese Betrachtungen gehören indessen zur graphischen Statik und sie werden dort eine ausführliche Darstellung erhalten.

Von besonderem Interesse ist der Werth der Einsenkung y in der Balkenmitte, also zugleich der grösste Werth, den y annimmt. Man nennt diese Strecke den Biegungspfeil, der hier stets mit dem Buchstaben f bezeichnet werden soll. Mit $x = \frac{l}{2}$ erhält man aus Gl. (79)

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{E\Theta} = \frac{5}{384} \frac{Ql^3}{E\Theta}. \tag{80}$$

In der letzten Form dieser Gleichung ist unter Q die Gesammtbelastung des Balkens, also ql zu verstehen.

Zweitens sei ein Balken betrachtet, der in der Mitte der Spannweite eine Einzellast P trägt. Man hat hier

$$M = \frac{P}{2} x$$

und daher

$$E\Theta \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Px}{2}$$

oder nach zweimaliger Integration

$$E\Theta y = -\frac{Px^3}{12} + Cx + C_1.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten muss aber hier ein anderes Verfahren eingeschlagen werden. Der Ausdruck $\frac{P}{2}x$ für M ist nämlich nur für solche Querschnitte gültig, die links von der Mitte liegen; rechts davon wäre

$$M = \frac{P}{2}x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{P(l-x)}{2}$$

zu setzen. Infolgedessen gilt auch die vorausgehende endliche Gleichung nur für die linke Hälfte der elastischen Linie. Diese Linie selbst setzt sich aus zwei Aesten zusammen, die sich in der Mitte stetig und ohne Knick aneinander schliessen, die aber zu verschiedenen Bildungsgesetzen gehören. Hier wird die Lösung dadurch vereinfacht, dass die Last in der Mitte angenommen wurde. Dadurch sind beide Aeste der elastischen Linie symmetrisch zueinander gestaltet und symmetrisch gelegen und es genügt, den einen Ast zu betrachten.