Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 4. Die reciproken Kräftepläne

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

angenommen wurden, muss man den Kräfteplan auch für die rechte Hälfte des Binders weiter zeichnen. Man kommt dann zum Kraftecke IV und findet hierfür die Zeichnung in Abb. 11 schon vorbereitet, da sich die am Knotenpunkte IV angreifenden bekannten Stabspannungen 4 und 5 schon in richtiger Aufeinanderfolge in der Figur vorfinden. Hätte man das Krafteck III so wie in Abb. 10 gewählt, so würde dies nicht zutreffen.

Neuerdings verwendet man überall, wo es angeht, fast nur noch die nach dem Muster der Abb. 11 angeordneten Kräftepläne. Sie werden aus einem Grunde, der bald hervortreten wird, als reciproke Kräftepläne oder auch als Cremona'sche Kräftepläne bezeichnet, weil Cremona sie, wenn auch nicht selbst zuerst einführte, so doch eingehend in Bezug auf ihre geometrischen Eigenschaften untersuchte und dadurch ihrer Anwendung in der graphischen Statik den Weg ebnete. Gerechter wäre es eigentlich, sie als Bow'sche Kräftepläne zu bezeichnen, da von dem Engländer Bow zuerst eine leicht befolgbare Anweisung dafür gegeben wurde, wie sie in den gewöhnlich vorliegenden einfachen Fällen construirt werden können.

§ 4. Die reciproken Kräftepläne.

Wir wollen uns jetzt genauer überlegen, wie man den Kräfteplan einrichten muss, um zu erreichen, dass jede Stabspannung in ihm nur einmal als Seite vorkommt, oder so, mit anderen Worten, dass man beim Uebergange zum folgenden Kraftecke die dazu gehörigen bekannten Stabspannungen schon in richtiger Lage zu einander vorfindet. Dabei sollen sich aber unsere Betrachtungen, wie es an dieser Stelle auch nicht anders sein kann, immer noch in erster Linie auf einfache Binderfiguren beziehen, d. h. auf solche, die in der vorher beschriebenen Weise durch Nebeneinanderlegen von Dreiecken, von denen sich jedes folgende mit einer Seite an das vorhergehende anschliesst, erhalten werden können. Im Uebrigen können indessen Zahl und Gestalt dieser Dreiecke beliebig sein.

Zu diesem Zwecke müssen wir uns zunächst die geometrischen Beziehungen zwischen der Binderfigur und dem Kräfteplane klar machen. Zur Binderfigur wollen wir hierbei auch die Richtungslinien der äusseren Kräfte (der Lasten und der Auflagerkräfte) rechnen. Dann ist zunächst klar, dass jeder Linie in der einen Figur eine zu ihr parallele Linie in der anderen Figur entsprechen muss, wenn der Kräfteplan so gezeichnet ist, wie wir ihn wünschen. Ferner entspricht auch jedem Punkte in der Binderfigur ein Polygon im Kräfteplane, nämlich das diesem Knotenpunkte zugehörige Krafteck.

Man kann aber leicht zeigen, dass auch umgekehrt jedem Punkte im Kräfteplane, an dem mehrere Stabspannungen aneinander stossen, ein Polygon in der Binderfigur entsprechen muss. Dies soll zunächst an dem bereits in Abb. 11 vorliegenden Kräfteplane nachgewiesen werden. Man betrachte etwa den Punkt, in dem die Seiten 1, 2, 3 zusammen stossen. Dieser Punkt wird (ebenso wie jeder andere, von dem keine der äusseren Kräfte ausgeht) während der Construction des Kräfteplanes zuerst durch Schnitt von zwei Linien (hier der Linien 1 und 2) gefunden. Diese beiden Linien gehören zu einem Kraftecke, das sich auf einen der Knotenpunkte (hier I) des Binders bezieht. Hiernach gehen die Seiten 1 und 2 im Binder jedenfalls von einem Punkte (nämlich hier von I) aus und sie schliessen sich daher schon so aneinander, wie zwei aufeinander folgende Seiten in einem Polygone. Man wird zugleich bemerken, dass dieser Schluss ganz allgemein und nicht nur für das hier zur Erleichterung der Vorstellung gewählte Beispiel zutrifft; wenn man dieses entbehren zu können glaubt, möge man den Betrachtungen nur ohne Beachtung des Beispiels folgen und man wird sie dann unter allen Umständen zutreffend finden.

Nun bedenke man, dass jeder Stab zwei Knotenpunkte verbindet und dass daher in dem für die ganze Binderfigur bis zu Ende durchgeführten Kräfteplane auch jede Seite, die eine Stabspannung angibt, zu zwei Kraftecken gehört. Bisher haben wir nur eines der Kraftecke ins Auge gefasst, die im

Punkte 1, 2, 3 zusammenstossen. Die Seite 1 gehört aber jedenfalls noch zu einem zweiten Kraftecke (hier II) und im Punkte 1, 2, 3 muss sich daher an 1 noch eine andere Stabspannung anreihen, da wir angenommen haben, dass im Punkte 1, 2, 3 keine äusseren Kräfte anstossen sollen. Diese andere Stabspannung (hier 3) greift aber in der Binderfigur mit 1 an demselben Knotenpunkte an und demnach schliessen sich im Binder auch 1 und 3 aneinander an wie zwei aufeinander folgende Seiten in einem Polygone.

Aber auch die Stabspannung 3 kommt jedenfalls noch in einem anderen Kraftecke vor. Am Punkte 1, 2, 3 muss sich daher ausser 1 auch noch eine andere Stabspannung (hier 2) an sie anschliessen und wir schliessen wieder wie vorher, dass sich beide (nämlich 3 und 2) in der Binderfigur an dem betreffenden Knotenpunkte (III) aufeinander folgen müssen. Im vorliegenden Falle sind wir damit schon zur ersten Stabspannung zurückgelangt, von der wir bei dieser Betrachtung ausgingen. In der Binderfigur schliessen sich alle, wie bewiesen, aneinander an und wenn wir zur ersten zurückkehren, so bilden sie dort ein geschlossenes Polygon. Zugleich erkennt man aber, dass dieselbe Schlussweise, wenn mehr als drei Stabspannungen an einem Punkte des Kräftepolygons zusammen stossen sollten, in der gleichen Art fortgesetzt werden könnte, bis man schliesslich wieder, nachdem alle anderen Seiten erschöpft sind, zur ersten zurückkommen müsste. Hiernach ist ganz allgemein bewiesen, dass jedem Eckpunkte eines reciproken Kräfteplanes, von dem keine äusseren Kräfte ausgehen, ein geschlossenes Polygon in der Binderfigur entsprechen muss, dessen Ecken durch Knotenpunkte gebildet werden. So gehört auch zur Ecke 3, 4, 5 in Abb. 11 das Dreieck 3, 4, 5 in der Binderfigur, Abb. 9.

Es bleibt uns noch übrig, jene Ecken im Kräfteplane zu betrachten, von denen auch äussere Kräfte ausgehen. Eine äussere Kraft kommt im Gegensatze zu den Stabspannungen immer nur in einem Kraftecke vor, nämlich in jenem, das zu dem Knotenpunkte gehört, an dem sie angreift. Daraus folgt, dass im vollständigen reciproken Kräfteplane von einer Ecke niemals blos eine einzige äussere Kraft ausgehen kann, sondern entweder gar keine oder zwei oder auch vier oder überhaupt eine gerade Anzahl. Um dies zu beweisen nehme man an, es gehe nur eine einzige äussere Kraft von der Ecke aus. Diese gehört zu einem Kraftecke, in dem ausser ihr noch eine Stabspannung vorkommt, die wir (ohne Bezugnahme auf das vorige Beispiel) mit 1 bezeichnen wollen. Die Spannung 1 kommt dann noch in einem zweiten Kraftecke vor, in dem sich eine andere Spannung 2 an sie in der betrachteten Ecke anschliesst. Auch 2 gehört noch zu einem zweiten Kraftecke, von dem wieder eine neue Stabspannung 3 an der Ecke vertreten ist und so fort. Haben wir in dieser Weise alle Stabspannungen erschöpft, so bleibt schliesslich eine übrig, die nur noch in einem Kraftecke vorkäme. Bei einem Kräfteplane, wie wir ihn voraussetzen, ist dies aber nicht möglich, da in ihm jede Seite zu zwei Kraftecken gehören soll. In der That kann also nicht eine einzige äussere Kraft von der Ecke ausgehen, sondern es muss noch eine zweite hinzukommen, die sich mit der vorher übrig gebliebenen Stabspannung zum letzten Kraftecke zusammenschliesst. Ebenso kann man beweisen, dass die Zahl der äusseren Kräfte an der Ecke jedenfalls grad sein muss, wenn mehr als zwei vorkommen sollten. Im Uebrigen kommt dieser Fall bei den einfacheren Aufgaben, die wir jetzt im Auge haben, überhaupt nicht vor.

Gehen von jeder Ecke des Kräfteplanes entweder gar keine oder zwei, aber nicht mehr als zwei Strecken aus, die äussere Kräfte darstellen, so folgt, dass alle Ecken, an denen sie vertreten sind, durch diese Strecken zu einem geschlossenen Polygone verbunden werden. Unter Umständen kann dieses Polygon auch in eine Grade übergehen, nämlich immer dann, wenn die äusseren Kräfte alle parallel zu einander sind. Damit überhaupt Gleichgewicht möglich sei, muss selbstverständlich die geometrische Summe der äusseren Kräfte gleich Null sein. Wir sehen nun, dass das geschlossene Polygon der äusseren Kräfte, das die Erfüllung dieser Bedingung vor Augen führt, ebenfalls in dem Kräfteplane mit enthalten sein muss. Dies gibt uns einen weiteren Fingerzeig dafür ab, wie man den Kräfteplan einrichten muss, damit er unseren Wünschen entspricht: jede äussere Kraft, die neu hinzukommt, muss an einem Endpunkte der vorigen angesetzt werden. Darin unterschied sich auch in der That die Anordnung der Abb. 10 von der in Abb. 11. Während bei der früheren Figur die äussere Kraft P im Kraftecke II so angetragen wurde, dass beide Kraftecke auseinander fielen, liess man diese in Abb. 11 sich überdecken und reihte P an den Endpunkt des Auflagerdrucks $1^1/_2 P$ an, der im vorigen Kraftecke I vorkam und zwar so, dass sich die Pfeile beider äusseren Kräfte an dem gemeinsamen Punkte aufeinander folgen.

Kämen schliesslich an einer Ecke des Kräfteplanes vier äussere Kräfte vor, so fielen an dieser Stelle zwei Ecken des Kraftecks der äusseren Kräfte zusammen, oder mit anderen Worten, das Krafteck zerfiele in zwei geschlossene Polygone mit einer gemeinsamen Ecke und ähnlich wäre es in noch verwickelteren Fällen, die hier keine weitere Besprechung erfordern. Dagegen sei noch darauf hingewiesen, dass an einer Ecke des Kräfteplanes auch nur zwei äussere Kräfte und gar keine Stabspannung vorkommen könnten. Dann würden aber in der Binderfigur beide äusseren Kräfte zu demselben Knotenpunkte gehören. Man kann diese Ecke aus dem Kräfteplane abschneiden, indem man die anderen Endpunkte beider Kräfte mit einander verbindet. Diese Verbindungslinie stellt dann die Resultirende der beiden äusseren Kräfte an dem Knotenpunkte dar.

Ferner folgt noch aus den vorhergehenden Betrachtungen, dass jedem Punkte des Kräfteplanes, von dem zwei äussere Kräfte und eine beliebige Zahl Stabspannungen ausgehen, in der Binderfigur ein Linienzug entspricht, der mit der Richtungslinie von einer der äusseren Kräfte beginnt, sich den Stäben entlang fortsetzt und mit der Richtungslinie der anderen äusseren Kraft aufhört. Dieser Linienzug stellt zwar nicht gerade ein Polygon im Sinne der Planimetrie dar; wir können aber diese

Bezeichnung im erweiterten Sinne darauf übertragen. Dann lässt sich aussagen, dass die Binderfigur in ebensoviele Polygone zerlegt werden kann, als Ecken im Kräfteplane vorkommen, und dass ferner auch jede Seite in der Binderfigur zweien dieser Polygone gemeinsam ist. Hiermit zeigt sich aber, dass zwischen der Binderfigur und dem Kräfteplane eine wechselseitige Beziehung besteht, die für beide in der gleichen Art gilt. Jeder Ecke in der einen Figur entspricht ein Polygon in der anderen und jeder Seite eine zu ihr parallele Seite. Rein geometrisch betrachtet, könnten daher beide Figuren auch die Rollen mit einander vertauschen, d. h. man kann ebensogut die Aufgabe stellen und lösen, zu dem gegebenen Kräfteplane eine zugehörige Binderfigur zu construiren, als umgekehrt. Zwei Figuren, die in dem näher bezeichneten Verhältnisse zu einander stehen, bezeichnet man als reciprok. Dabei ist noch darauf hinzuweisen, dass dasselbe Wort in der Geometrie freilich noch (und zwar gewöhnlich) zur Bezeichnung einer anderen Art der geometrischen Verwandtschaft verwendet wird; in der graphischen Statik wird es aber immer in dem zuvor durch gesperrten Druck näher angegebenen Sinne gebraucht.

§ 5. Construction des reciproken Kräfteplanes nach dem Verfahren von Bow.

Die vorausgehenden Betrachtungen sind, obschon darin auch auf ein einfaches Beispiel Bezug genommen wurde, doch immer noch ziemlich abstract gehalten. Es empfiehlt sich, zunächst im Allgemeinen Kenntniss von ihnen zu nehmen und dabei das, was dem Verständnisse Schwierigkeiten bereitet haben sollte, bis auf Weiteres zu übergehen, dafür aber später, wenn man zuvor eine Anzahl reciproker Kräftepläne selbst gezeichnet hat, wieder darauf zurückzukommen. Bei Betrachtungen solcher Art besteht nämlich die Hauptschwierigkeit darin, dass dem Neulinge zugemuthet wird, eine Anzahl Vorstellungen, mit denen er noch nicht vertraut ist, auf einmal zu erfassen. Dazu gehört eine grosse Anstrengung, die Jenem