Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 3. Kräftepläne für einfache Dachbinder.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

dem eine Kathete unendlich klein ist, nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung von der anderen Kathete unterscheidet. — Sobald eine solche Verschiebung des Knotenpunktes eingetreten ist, liegen die drei Stäbe nachher nicht mehr genau in derselben Ebene, so dass schliesslich doch wieder Gleichgewicht zwischen den Stabspannungen und der Belastung $\mathfrak{P}$ zu Stande kommen kann.

Hierbei ist aber noch zu beachten, dass die Stabspannungen sehr gross im Verhältnisse zur Last $\mathfrak{P}$ gefunden werden, wenn die Stäbe zwar nicht genau, aber nahezu in einer Ebene liegen. Man pflegt daher auch zu sagen, dass die Stabspannungen im Ausnahmefalle unendlich gross werden müssten, womit nur ausgedrückt werden soll, dass selbst durch noch so grosse Stabspannungen kein Gleichgewicht mehr am Knotenpunkte — im Falle der Abb. 8 wenigstens nicht ohne eine vorausgehende Verschiebung des Knotenpunktes — hergestellt werden könnte.

Im Ausnahmefalle wird die Determinante der Coefficienten aller S in den Gleichungen (1) zu Null; die Auflösung dieser Gleichungen führt daher beim analytischen Verfahren unmittelbar zu den Werthen ∞ für die Stabspannungen.

§ 3. Kräftepläne für einfache Dachbinder.

Zu den einfachsten und häufigsten Anwendungen der graphischen Statik gehört die Ermittelung der Stabspannungen in einfachen Dachbindern oder ihnen ähnlich gestalteten Brückenträgern. Sie beruht auf einer mehrfachen Wiederholung der im Anschlusse an Abb. 2 besprochenen Lösung der Aufgabe, eine gegebene Kraft nach zwei mit ihr in derselben Ebene liegenden Richtungslinien zu zerlegen. Freilich knüpfen sich daran alsbald noch weitergehende Ueberlegungen, die eine eingehende Besprechung erfordern.

Zur Erläuterung bemerke ich zunächst, dass man zur Errichtung von Brücken oder ähnlichen Tragconstructionen vor Allem zwei, oder bei freitragenden Dächern eine grössere Zahl von „Hauptträgern" oder „Bindern" in parallelen, lothrechten Ebenen aufzustellen pflegt, die die ganze Spannweite überdecken. Auf diese Binder stützen sich bei den Dächern die „Pfetten“ die „Sparren“ und die „Haut“ des Daches, bei den Brücken die Constructionen der „Fahrbahn“. Die Last aller dieser „Sekundärconstructionen“ wird auf die Binder an den „Knotenpunkten“ übertragen. Die Binder bestehen — wenigstens in dem gewöhnlich vorliegenden Falle, der uns hier beschäftigen soll — aus ebenen Stabverbänden, deren geometrische Figur eine Aneinanderreihung von Dreiecken bildet, so dass sich vom einen Ende anfangend, jedes folgende Dreieck mit einer Seite und zwei Eckpunkten an das vorausgehende anschliesst. Diese Eckpunkte werden die Knotenpunkte des Binders genannt. Da die Gestalt eines Dreiecks unveränderlich ist, so lange die Seiten ihre Längen behalten, ist unter der gleichen Voraussetzung auch die aus allen diesen Dreiecken zusammengesetzte Binderfigur von unveränderlicher Gestalt. Das ist es aber, was man von einer Tragconstruction verlangen muss.

Man erkennt aus dieser einfachen geometrischen Betrachtung, dass es möglich ist, aus Stäben, die nur gegen Längenänderungen, also gegen Zug- oder Druckbeanspruchung hinreichend widerstandsfähig zu sein brauchen, während sie gegen Biegungen nur wenig widerstandsfähig sein können, einen tragfähigen Stabverband nach dem besprochenen Plane herzustellen. Der Vortheil, den man hiermit erreicht, liegt darin, dass die Zug- oder Druckfestigkeit eines langen Stabes von verhältnissmässig kleinem Querschnitte weit grösser ist, als die Biegungsfestigkeit gegenüber gleichen Lasten. — Wegen des geringen Biegungswiderstandes der Stäbe sieht man von diesem bei der Berechnung der Stabspannungen gewöhnlich ganz ab, achtet also nur auf die Kräfte, die in der Richtung der Stabmittellinien von einem Endpunkte zum andern übertragen werden. Es genügt dann, jeden Stab durch eine Strecke zu veranschaulichen, die man sich längs der Mittellinie des Stabes gezogen zu denken hat. Die von der Sekundärconstruction auf die Knotenpunkte des Binders übertragenen Lasten sind als gegeben anzusehen; es handelt sich dann um die Berechnung der von ihnen hervorgerufenen Stabspannungen.

Dies sei zunächst an dem Beispiele des viel angewendeten einfachen Polonçeau- oder Wiegmannbinders in Abb. 9ª erläutert. Die Binderfigur entsteht durch Aneinanderreihung von 5 Dreiecken und hat eine lothrechte Symmetrieaxe. Der Stab 6 liegt gewöhnlich etwas höher als die Verbindungslinie beider Auflagerknotenpunkte; doch ist dies nicht wesentlich, die Stäbe

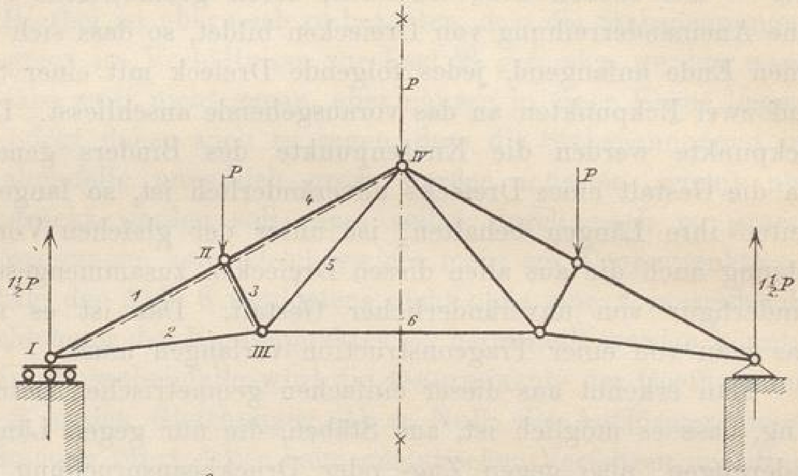

Abb. 9a.

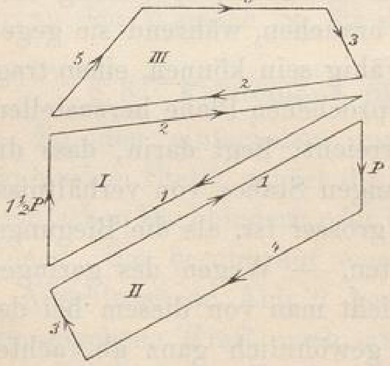

Abb. 9b.

2 und 6 können vielmehr auch in dieselbe (horizontale) Grade fallen. Das eine Ende des Binders wird mit der Mauer, auf die es sich stützt, fest verbunden, das andere mit Hülfe eines Gleit- oder Rollenlagers in horizontaler Richtung verschieblich aufgelagert. Dies geschieht einerseits, um dem Träger eine freie Ausdehnung oder Zusammenziehung bei Temperaturänderungen zu gestatten, andererseits um einen Seitenschub auf die Mauern, so lange nur senkrecht gerichtete Lasten vorkommen, zu vermeiden. Das Rollenlager ist in der Zeichnung am linken Ende angenommen und durch einige kleine Kreise angedeutet. Da die rollende Reibung nur sehr gering ist, kann der Auflager-

druck auf dieser Seite unter allen Umständen als lothrecht gerichtet angesehen werden. Falls nur lothrechte Lasten auf den Binder wirken, muss aber auch der Auflagerdruck am festen Auflager lothrecht gerichtet sein, weil die geometrische Summe aller äusseren Kräfte, also der Lasten und der beiden Auflagerdrücke, zu Null werden muss. In der Abbildung ist ferner angenommen, dass auf die drei mittleren Knotenpunkte der oberen „Gurtung" (so nennt man den Zug der aufeinanderfolgenden Stäbe 1, 4 u. s. f., die die Binderfigur nach oben hin begrenzen) gleich grosse Lasten P einwirken. Der Symmetrie wegen ist dann der Auflagerdruck auf jeder Seite gleich der Hälfte dieser Lasten, also gleich $1^1/_2\,P$. Eine Last, die etwa ausserdem noch auf einen Auflagerknotenpunkt wirkt, kommt für den Binder nicht in Betracht, da sie unmittelbar auf die Mauer übertragen wird, ohne Stabspannungen hervorzurufen.

Aus der Symmetrie der Gestalt und der Belastung folgt auch, dass die spiegelbildlich zu einander liegenden Stäbe gleiche Spannungen erfahren. Es genügt daher, die zur linken Hälfte der Figur gehörigen Stabspannungen zu berechnen. Diese sind daher auch allein mit arabischen Ordnungsnummern bezeichnet, während den Knotenpunkten römische Ziffern beigeschrieben sind.

Man beginnt mit der Betrachtung des Gleichgewichtes der Kräfte am Knotenpunkte I. Hier müssen die von den Stäben 1 und 2 übertragenen Spannungen, die nach den vorausgehenden Bemerkungen in die Richtungen der Stäbe fallen, mit dem Auflagerdrucke $1^1/_2\,P$ im Gleichgewichte stehen. Man kann also sofort das ebenfalls mit I bezeichnete Kräftedreieck in Abb. 9^b zeichnen. Der Pfeil des Auflagerdrucks geht nach oben und damit folgen auch die beiden anderen in die Abbildung eingetragenen Pfeile, da alle drei im selben Umlaufssinne aufeinander folgen müssen. Denkt man sich den Pfeil von 1 in die Binderfigur nach dem Knotenpunkte I übertragen, so erkennt man, dass die Stabspannung 1 den Knotenpunkt I vom Stabe fort zu bewegen sucht. Der Stab 1 ist daher gedrückt.

Ebenso erkennt man, dass Stab 2 gezogen ist. Es ist üblich, die gedrückten Stäbe in der Binderfigur durch Beisetzen von Schattenstrichen zu kennzeichnen. Dies ist in der Abbildung durch gestrichelte Linien geschehen, die neben den Stäben her laufen.

Hierauf geht man zu einem anderen Knotenpunkte weiter, an dem nur noch zwei der Grösse nach unbekannte Kräfte angreifen. Dies ist in unserem Falle Knotenpunkt II. Die Stabspannung 1 ist nämlich aus der vorhergehenden Untersuchung bereits bekannt; wir müssen nur beachten, dass sie am Knotenpunkte II mit dem entgegengesetzten Pfeile angreift, als am Knotenpunkte I. Wir zeichnen hiernach das ebenfalls mit II bezeichnete Kräfteviereck, indem wir zuerst 1 und die Last P mit aufeinander folgenden Pfeilen aneinander reihen und dann durch die Endpunkte Parallelen zu den Richtungen der Stäbe 3 und 4 ziehen. Die Pfeile sind wieder einzutragen und nach ihnen festzustellen, dass die Stäbe 3 und 4 beide gedrückt sind, genau wie dies vorher geschehen war. Da die gleiche Seite 1 im Kraftecke II wie in I vorkommt, wurden, um dies hervorzuheben, beide Kraftecke unmittelbar untereinander gezeichnet.

Dann geht man zu Knotenpunkt III über und verfährt ebenso. Die Stabspannungen 2 und 3 kennt man schon aus den vorausgehenden Kraftecken und man hat nur zu beachten, dass beide entgegengesetzte Pfeile erhalten müssen, als in den früheren Fällen. Man reiht also im Kraftecke III die nach Grösse und Pfeil bekannten Strecken 3 und 2 mit aufeinander folgenden Pfeilen aneinander und zieht die Parallelen zu 5 und 6. Dann kennt man bereits alle Stabspannungen; die Stäbe 5 und 6 sind beide gezogen.

Die Aufgabe ist hiermit gelöst; aber noch nicht auf dem einfachsten Wege. Zunächst erkennt man sofort, dass die Zeichnung vereinfacht wird, wenn man die übereinander liegenden Kraftecke mit den gleich bezeichneten Seiten 1 und 2 zu einer einzigen Figur zusammenrückt. Man spart dadurch nicht nur einige Linien und etwas Platz, sondern die Zeichnung kann auch genauer ausgeführt werden, je weniger Linien sie im Ganzen enthält. Bei den Anwendungen in der Praxis zieht man daher alle Kraftecke stets zu einer einzigen Figur zusammen, die man den **Kräfteplan** nennt. In Abb. 10, die sich von Abb. 9^b im Uebrigen gar nicht unterscheidet, ist dies ausgeführt. Nur die eine kleine Unbequemlichkeit muss man dabei mit in den Kauf nehmen, dass man die Pfeile auf die gemeinsamen Seiten von zwei aneinander grenzenden Kraftecken nicht mehr unmittelbar eintragen kann, da im einen Kraftecke der eine, im anderen der entgegengesetzte Pfeil gilt. Hat man, wie in Abb. 10, die einzelnen Kraftecke so eingerichtet, dass sie alle einfache Polygone bilden, die sich nicht überschlagen und die nebeneinander liegen, ohne sich zu überdecken, so kann man sich allerdings, wie es auch in der Figur geschehen ist, leicht dadurch helfen, dass man nicht mehr auf den Linien 1 und 2 selbst, aber zu beiden Seiten davon zwei Pfeile angibt, von denen jeder zu jenem Polygone gehört, in dessen Fläche er hinein fällt.

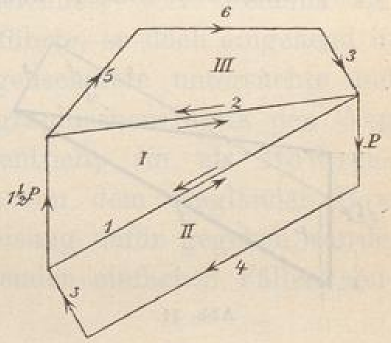

Abb. 10.

Aber auch hiermit sind wir noch nicht zu dem einfachsten, d. h. aus der Mindestzahl von Linien gebildeten Kräfteplane gelangt. In den Kraftecken II und III kommt noch dieselbe Stabspannung 3 vor und man muss diese Strecke aus dem einen entnehmen und sie in das andere eintragen, was nicht nur unbequem, sondern auch mit unvermeidlichen kleinen Zeichenfehlern verbunden ist. Bei einem so einfachen Beispiele, wie wir es im Augenblicke behandeln, macht dies freilich nicht viel aus; wir wollen aber das Verfahren schon hier so ausbilden, wie es in verwickelteren Fällen am besten verwendet wird. **Dass man den Kräfteplan auch so einrichten kann, dass jede Stabspannung nur einmal in ihm als Seite vorkommt**, erkennt man sofort aus Abb. 11, die in allen Strecken vollkommen mit

Abb. 10 übereinstimmt und sich nur durch die verschiedene Anordnung der Kraftecke von ihr unterscheidet. Um die Entstehungsart dieser Figur deutlich hervorzuheben — und nur aus diesem Grunde, der späterhin, wenn man sich mit diesen Dingen erst vertraut gemacht hat, wegfällt — ist das Krafteck I, das mit dem in Abb. 10 übereinstimmt, durch starke Striche hervorgehoben. Das Krafteck II (diese Bezeichnungen sind in der Figur weggelassen), oder wenigstens die Seiten, die hinzutreten müssen, um dieses Krafteck zu bilden, sind mit schwächeren Strichen ausgezogen, während die beim Kraftecke III neu hinzukommenden Seiten durch gestrichelte Linien angegeben sind. Das Krafteck II ist mit dem ihm in Abb. 10 entsprechenden immer noch kongruent; es ist nur um 180° dagegen gedreht und überdeckt sich mit dem Kraftecke I. Auf ein Beisetzen von Pfeilen muss man hier freilich verzichten, da z. B. bei der Seite 1 nicht ersichtlich gemacht werden könnte, welcher von beiden Pfeilen zum Kraftecke I oder zu II gehören soll. Auf diesen kleinen Nachtheil legt man aber nicht viel Gewicht, da man sich bei einiger Uebung sehr leicht daran gewöhnt, die Pfeile jedesmal in Gedanken richtig beizufügen, sobald man auf irgend eines der in dem Kräfteplane enthaltenen Kraftecke sein Augenmerk richtet.

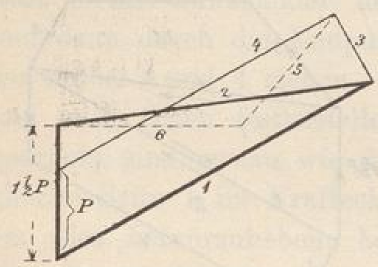

Abb. 11.

Das Krafteck III ist in Abb. 11 überschlagen. Man hätte es auch so wie in Abb. 10 zeichnen können, da man das Aneinanderschliessen der Seiten 3 und 2, wodurch ein wiederholtes Auftragen von 3 entbehrlich gemacht werden sollte, schon durch die passende Uebereinanderlagerung der Kraftecke I und II erreicht hat. Dass es so wie geschehen gezeichnet wurde, hat nur den Zweck, einer Fortsetzung des Kräfteplanes auf die übrigen Knotenpunkte den Weg vorzubereiten. Hier kommt eine solche Fortsetzung freilich nicht in Betracht; falls aber die Lasten nicht symmetrisch vertheilt sind, wie sie hier angenommen wurden, muss man den Kräfteplan auch für die rechte Hälfte des Binders weiter zeichnen. Man kommt dann zum Kraftecke IV und findet hierfür die Zeichnung in Abb. 11 schon vorbereitet, da sich die am Knotenpunkte IV angreifenden bekannten Stabspannungen 4 und 5 schon in richtiger Aufeinanderfolge in der Figur vorfinden. Hätte man das Krafteck III so wie in Abb. 10 gewählt, so würde dies nicht zutreffen.

Neuerdings verwendet man überall, wo es angeht, fast nur noch die nach dem Muster der Abb. 11 angeordneten Kräftepläne. Sie werden aus einem Grunde, der bald hervortreten wird, als reciproke Kräftepläne oder auch als Cremona'sche Kräftepläne bezeichnet, weil Cremona sie, wenn auch nicht selbst zuerst einführte, so doch eingehend in Bezug auf ihre geometrischen Eigenschaften untersuchte und dadurch ihrer Anwendung in der graphischen Statik den Weg ebnete. Gerechter wäre es eigentlich, sie als Bow'sche Kräftepläne zu bezeichnen, da von dem Engländer Bow zuerst eine leicht befolgbare Anweisung dafür gegeben wurde, wie sie in den gewöhnlich vorliegenden einfachen Fällen construirt werden können.

§ 4. Die reciproken Kräftepläne.

Wir wollen uns jetzt genauer überlegen, wie man den Kräfteplan einrichten muss, um zu erreichen, dass jede Stabspannung in ihm nur einmal als Seite vorkommt, oder so, mit anderen Worten, dass man beim Uebergange zum folgenden Kraftecke die dazu gehörigen bekannten Stabspannungen schon in richtiger Lage zu einander vorfindet. Dabei sollen sich aber unsere Betrachtungen, wie es an dieser Stelle auch nicht anders sein kann, immer noch in erster Linie auf einfache Binderfiguren beziehen, d. h. auf solche, die in der vorher beschriebenen Weise durch Nebeneinanderlegen von Dreiecken, von denen sich jedes folgende mit einer Seite an das vorhergehende anschliesst, erhalten werden können. Im Uebrigen können indessen Zahl und Gestalt dieser Dreiecke beliebig sein.