



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Vorlesungen über technische Mechanik**

**Föppl, August**

**Leipzig, 1900**

§. 2. Zerlegung einer Kraft nach gegebenen Richtungslinien

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

Kräfte anwendbar. Hat man, wie in dem gewählten Beispiele, nur drei Kräfte zusammzusetzen, so kann dies auch durch Construction eines Parallelepipedes geschehen, wovon  $A$  eine Ecke ist, von der die drei Strecken 1, 2, 3 als Kanten ausgehen. Die von  $A$  aus gezogene Hauptdiagonale des Parallelepipedes gibt die Resultirende der drei Kräfte an. Dies folgt leicht daraus, dass die Hauptdiagonale eines Parallelepipedes als geometrische Summe der drei Kanten angesehen werden kann. Man stellt diesen Satz vom Kräfteparallelepipedem gern dem Satze vom Kräfteparallelogramme gegenüber. Für die wirkliche Ermittlung von  $R$  ist aber die in Abb. 1 benutzte Construction gewöhnlich weit einfacher und bequemer als die Construction des Parallelepipedes.

Um die gleiche Aufgabe analytisch zu lösen, ermittelt man zunächst die Projektionen der Kräfte 1, 2, 3 auf drei zu einander rechtwinkligen Axen. Die Componenten von  $R$  in den Richtungen dieser Axen sind dann gleich den algebraischen Summen der Componenten der gegebenen Kräfte in denselben Axenrichtungen. Hiermit ist auch die Grösse von  $R$  als Quadratwurzel aus der Quadratsumme der Componenten bekannt und die Richtung von  $R$  lässt sich durch die Cosinus der Winkel zwischen  $R$  und den Axenrichtungen hinreichend beschreiben. Aus den Lehren von Band I geht dies bereits hinreichend hervor.

§ 2. Zerlegung einer Kraft nach gegebenen Richtungslinien.

Eine gegebene Kraft  $\mathfrak{P}$ , die am Punkte  $A$  angreift (Abb. 2<sup>a</sup>), soll nach zwei mit ihr in derselben Ebene liegenden Richtungslinien 1 und 2 zerlegt werden. Diese Ebene möge als Zeichenebene gewählt sein. Unter der Zerlegung ist ein Ersatz von  $\mathfrak{P}$  durch zwei in den bezeichneten Richtungslinien wirkende Kräfte zu verstehen. Die Zerlegung erfolgt mit Hülfe des in Abb. 2<sup>b</sup>

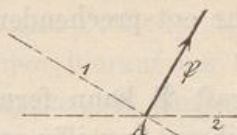


Abb. 2a.

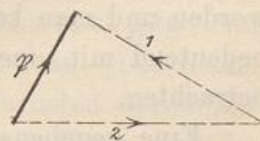


Abb. 2b.

gezeichneten Kräfte-dreiecks  $\mathfrak{P}$ , 1, 2, von dem die eine Seite  $\mathfrak{P}$  vollständig gegeben ist, während von den beiden anderen Seiten die Richtungen bekannt sind. Bei der Festsetzung der den Seiten des Kräfte-dreiecks zugehörigen Pfeile hat man darauf zu achten, dass  $\mathfrak{P}$  die Resultirende von 1 und 2 sein soll. — Auch mit Hülfe eines Kräfteparallelogramms, das unmittelbar vom Punkte  $A$  aus in den gegebenen Richtungen, mit  $\mathfrak{P}$  als Diagonale, gezeichnet wird, lässt sich die verlangte Zerlegung ausführen. In der Regel ist aber die Benutzung eines nebenan besonders herausgezeichneten Kräfte-dreiecks für die Lösung der Aufgabe mehr zu empfehlen. Man sieht dies vielleicht zuerst nicht recht ein, wenn man nur einer so einfachen Zeichnung wie in Abb. 2 gegenübersteht; sobald dieselbe Construction aber sehr oft wiederholt auf kleinem Raume in derselben Zeichnung durchgeführt werden muss, ist der Vortheil, den man durch Trennen des Kräfte-cks von der Zeichnung, in der die Kräfte gegeben sind, erlangt, sehr erheblich.

Die Zerlegungsaufgabe steht im engsten Zusammenhange mit einer Gleichgewichtsaufgabe. Weiss man nämlich, dass die vollständig gegebene Kraft  $\mathfrak{P}$  mit zwei anderen Kräften, deren Richtungslinien 1, 2 bekannt sind, im Gleichgewichte stehen muss, so findet man aus der Construction des Kräfte-dreiecks  $\mathfrak{P}$ , 1, 2 auch die Grössen von 1 und 2. Der einzige Unterschied gegenüber dem vorigen Falle besteht darin, dass jetzt die Pfeile der Kräfte 1 und 2 umzukehren sind, weil die geometrische Summe aller drei Kräfte zu Null werden muss. Dasselbe trifft auch bei den anderen Zerlegungsaufgaben zu, mit denen wir uns in der Folge noch zu beschäftigen haben werden und man kann daher jede Zerlegungsaufgabe als gleichbedeutend mit einer ihr entsprechenden Gleichgewichtsaufgabe betrachten.

Eine gegebene Kraft  $\mathfrak{P}$  kann ferner auch in eindeutiger Weise nach drei durch ihren Angriffspunkt gehenden Richtungslinien zerlegt werden, wenn diese nicht in derselben Ebene liegen. Am einfachsten gestaltet sich hier die Lösung, oder wenigstens die zu einer Lösung führende Ueberlegung auf

Grund des Satzes vom Kräfteparallelepiped. Von diesem ist die Hauptdiagonale  $\mathfrak{P}$  vollständig gegeben, während man zugleich die Richtungen der drei vom Angriffspunkte ausgehenden Kanten kennt. Man lege drei Ebenen durch diese drei Kanten und ziehe zu jeder durch den Endpunkt von  $\mathfrak{P}$  eine parallele Ebene. Damit hat man die 6 Seitenflächen des Parallelepipedes, dessen Kanten und Eckpunkte nun leicht aufgesucht werden können.

In Abb. 3 ist dies für den Fall ausgeführt, dass zwei der gegebenen Richtungslinien, nämlich 1 und 2, in einer horizontalen Ebene liegen. Vereinfachungen dieser Art kommen nämlich bei der wirklichen Ausführung der Construction bei der praktischen Anwendung sehr häufig vor und es schien nützlich, um bei dem ersten Beispiele zu einer möglichst einfachen Figur zu gelangen, den einfacheren Fall von vornherein voranzusetzen. Das Verfahren selbst bleibt sich ohnehin in allen Fällen gleich. Die

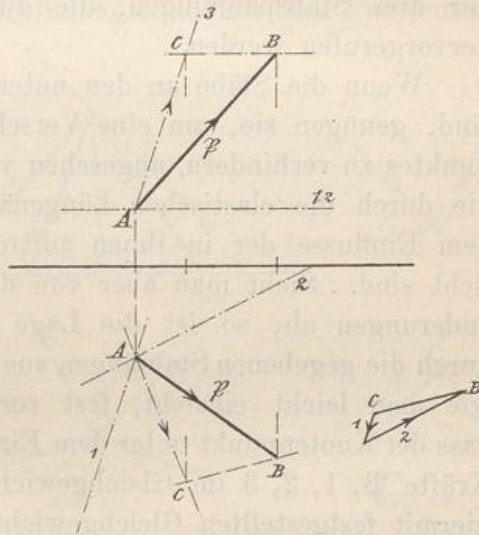


Abb. 3.

Kraft  $\mathfrak{P}$  ist durch die Strecken  $AB$  in Aufriss und Grundriss dargestellt. Man lege durch den Endpunkt  $B$  eine horizontale (d. h. zu 1, 2 parallele) Ebene und suche deren Schnittpunkt  $C$  mit der Richtungslinie 3 auf. Die Strecke  $AC$  gibt dann schon Grösse, Richtung und Pfeil der Kraft 3 an. Die beiden anderen Kräfte findet man hierauf am einfachsten durch Zerlegung der durch die Strecke  $CB$  dargestellten Kraft nach den Richtungen von 1 und 2, also durch Construction eines Kräfte-dreiecks, von dem  $CB$  die vollständig gegebene Seite bildet. Im Grundrisse ist dies nebenan ausgeführt.

Gewöhnlich bedient man sich aber anderer Verfahren zur

Ausführung der Kräftezerlegung oder zur Lösung der ihr entsprechenden Gleichgewichtsaufgabe. Sehr häufig wird namentlich ein von Culmann angegebenes Verfahren benutzt, das in Anlehnung an eine öfters vorkommende Aufgabe näher erläutert werden mag. In Abb. 4<sup>a</sup> seien 1, 2, 3 die im Aufrisse und Grundrisse gezeichneten Stäbe eines sogenannten Bockgerüstes, die man sich oben gelenkförmig mit einander verbunden denken mag, während die unteren Endpunkte festgehalten sind.  $\mathfrak{P}$  sei eine äussere Kraft, die an dem oberen Knotenpunkte angreift; es handele sich um die Bestimmung der drei Stabspannungen, die durch  $\mathfrak{P}$  in den drei Stäben hervorgerufen werden.

Wenn die Stäbe an den unteren Endpunkten festgehalten sind, genügen sie, um eine Verschiebung des oberen Knotenpunktes zu verhindern, abgesehen von den kleinen Bewegungen, die durch die elastischen Längenänderungen der Stäbe unter dem Einflusse der in ihnen auftretenden Spannungen ermöglicht sind. Sieht man aber von diesen geringfügigen Längenänderungen ab, so ist die Lage des oberen Knotenpunktes durch die gegebenen Stablängen aus rein geometrischen Gründen, wie man leicht einsieht, fest vorgeschrieben. Daraus folgt, dass der Knotenpunkt unter dem Einflusse der auf ihn wirkenden Kräfte  $\mathfrak{P}$ , 1, 2, 3 im Gleichgewichte bleiben muss. Aus der hiermit festgestellten Gleichgewichtsbedingung lassen sich die drei Stabspannungen ableiten.

Hierzu denke man sich die 4 Kräfte in zwei Gruppen eingetheilt, von denen die eine aus den Stabspannungen 1 und 2, die andere aus  $\mathfrak{P}$  und 3 gebildet wird. Jede dieser beiden Gruppen kann man sich durch eine Resultirende ersetzt denken. Die Resultirende aus 1 und 2 muss jedenfalls in der durch die Richtungslinien beider Stäbe bestimmten Ebene enthalten sein und ebenso die andere Resultirende in der durch  $\mathfrak{P}$  und 3 gelegten Ebene. Da die 4 Kräfte im Gleichgewichte standen, müssen auch die beiden Resultirenden Gleichgewicht mit einander halten. Dazu gehört aber, dass sie in die gleiche Richtungslinie fallen. Hiernach muss die gemeinsame Richtungs-

linie von beiden mit der Schnittlinie der Ebenen 1, 2 und  $\mathfrak{P}$ , 3 zusammenfallen. Sobald man aber die Richtungslinie der Resultirenden aus  $\mathfrak{P}$  und 3 kennt, steht nichts mehr im Wege, ein Kräfte-dreieck aus diesen 3 Kräften zu zeichnen, das zunächst die Spannung im Stabe 3 und zugleich die Resultirende aus den beiden anderen Stabspannungen kennen lehrt. Diese selbst ergeben sich schliesslich durch Zeichnen eines zweiten Kräfte-dreiecks.

In Abb. 4 sind alle diese Constructionen ausgeführt. Zuerst wurde in Abb. 4<sup>a</sup> die horizontale Spur der Richtungslinie von  $\mathfrak{P}$  aufgesucht. Die Verbindungslinie mit dem Fusspunkte des Stabes 3 liefert

die horizontale Spur der Ebene  $\mathfrak{P}$ , 3. Die Spur der Ebene 1, 2 wird durch Verbinden der Fusspunkte beider Stäbe erhalten. Der Schnittpunkt der Spuren beider Ebenen liefert einen Punkt der

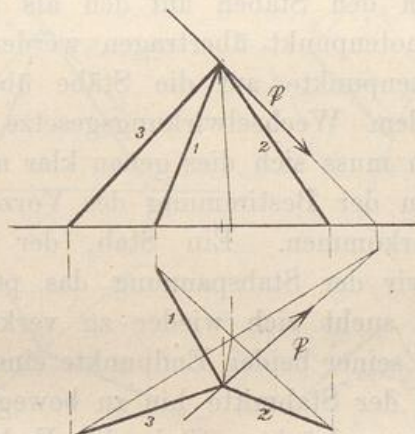


Abb. 4 a.

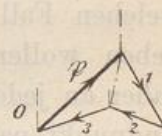
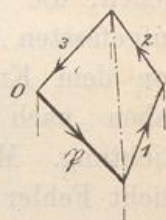


Abb. 4 b.

gesuchten Schnittlinie und die Schnittlinie selbst wird durch Ziehen der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem oberen Knotenpunkte erhalten. Sie kann dann auch noch in den Aufriss eingetragen werden. Nach diesen Vorbereitungen kann man zur Construction des in Abb. 4<sup>b</sup> gezeichneten Kräfte-cks übergehen. Man trägt zunächst, von einem beliebigen Punkte  $O$  beginnend, die gegebene Last  $\mathfrak{P}$  in Aufriss und Grundriss auf. Parallelen von den Endpunkten zu 3 und der Schnittlinie beider Ebenen in beiden Projektionstafeln liefern die Risse des ersten Kräfte-dreiecks. Zur Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung dient die Bemerkung, dass die Projektionen des dritten Dreieckspunktes in beiden Tafeln senkrecht über-

einander liegen müssen. Dann reiht man Parallelen zu 1 und 2 an, deren Schnittpunkte in beiden Projektionsebenen wiederum von selbst senkrecht übereinander liegen müssen. Man hat nun den ganzen windschiefen Kräftezug  $\mathfrak{P}$ , 1, 2, 3 vor sich und trägt nachträglich die Pfeile so ein, dass sie alle stetig aufeinander folgen.

Die Grösse der Stabspannungen erhält man hierauf durch Ermittlung der wahren Längen der Krafteckseiten. In der Abbildung ist dies nicht weiter ausgeführt. Ferner ergibt sich aus den Pfeilen, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt sind. Hierzu beachte man, dass sich die Pfeile auf jene Kräfte beziehen, die von den Stäben auf den als materiellen Punkt aufgefassten Knotenpunkt übertragen werden. Die rückwärts von dem Knotenpunkte auf die Stäbe übertragenen Kräfte haben nach dem Wechselwirkungsgesetze entgegengesetzte Richtung. Man muss sich dies genau klar machen, weil sonst leicht Fehler in der Bestimmung des Vorzeichens der Stabspannungen vorkommen. Ein Stab, der gezogen ist (für welchen Fall wir der Stabspannung das positive Vorzeichen geben wollen), sucht sich wieder zu verkürzen; er äussert daher an jedem seiner beiden Endpunkte eine Kraft, die diesen Endpunkt nach der Stabmitte hin zu bewegen sucht. Umgekehrt sucht ein gedrückter Stab die Endpunkte (oder die Körper, die ihn an diesen Endpunkten fassen) auseinander zu schieben. Ein Pfeil im Kraftecke der Abb. 4, der an den Knotenpunkt übertragen von der Stabmitte abgewendet ist, zeigt daher eine Druckspannung im Stabe an. Auf Grund dieser Ueberlegung findet man aus der Zeichnung, dass die Stäbe 1 und 2 bei der angenommenen Belastung des Bockgerüsts gedrückt sind, während 3 gezogen ist.

Eine andere Lösung derselben Aufgabe, die sich auf eine auch sonst in der graphischen Statik sehr häufig benutzte Ueberlegung stützt, rührt von Müller-Breslau her. Man beginnt bei ihr sofort mit der Construction des windschiefen Kräftevierecks der Kräfte  $\mathfrak{P}$ , 1, 2, 3. Die Seite  $\mathfrak{P}$  kann im Aufrisse und Grundrisse ohne Weiteres aufgetragen

werden. An beiden Enden dieser Seite zieht man Parallelen zu den Richtungen der Stabkräfte 1 und 3 (oder überhaupt zu irgend zwei der drei Stabrichtungen). Es handelt sich dann nur noch darum, zwischen diese beiden Linien die ihrer Richtung nach gegebene Seite 2 so einzuschieben, dass ihre Endpunkte auf die Linien 1 und 3 fallen.

Zu diesem Zwecke beginnt man damit (vgl. Abb. 5<sup>b</sup>), irgendwo eine Strecke 2' im Grundrisse in der vorgeschriebenen Richtung zwischen die Linien 1 und 3 zu legen. Im Aufrisse

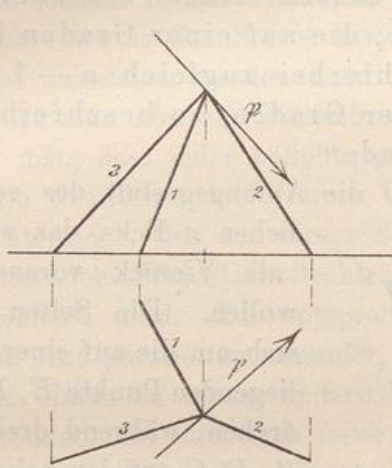


Abb. 5 a.

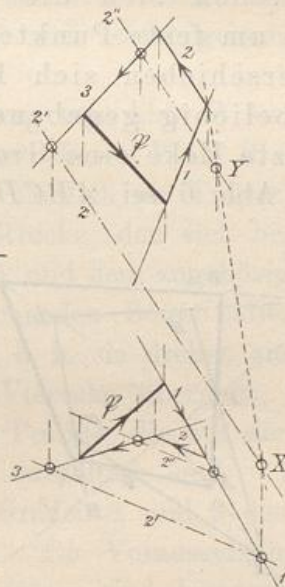


Abb. 5 b.

nehme man etwa den linken Eckpunkt auf der Projektion von 3 an und ziehe die Linie 2' dort ebenfalls in der ihr vorgeschriebenen Richtung. Der rechte Eckpunkt X ist damit bestimmt. Sollte nun die Strecke 2' zufällig richtig gewählt gewesen sein, so müsste der Punkt X auf der Vertikalprojektion von 1 enthalten sein. Im Allgemeinen wird dies aber nicht zutreffen. Man verwirft daher die getroffene Wahl und wiederholt die Construction unter einer anderen beliebigen Annahme 2'' für 2, womit man auf einen Eckpunkt Y an Stelle von X gelangt, der aber im Allgemeinen wieder nicht auf der

Vertikalprojektion von 1 enthalten ist. Es könnte nun scheinen, als wenn man die gleiche Construction noch sehr oft wiederholen müsste, bis man die richtige Lage von 2 ausprobirt hätte. Hier kommt uns aber ein Satz der projektivischen Geometrie zur Hülfe, der nun schnell zu der gesuchten Lösung führt.

Dieser Satz, der auch bei vielen anderen Constructionen der graphischen Statik mit grossem Nutzen verwendet wird, lautet:

„Drehen sich die Seiten eines veränderlichen  $n$ -Ecks um feste Punkte, die auf einer Geraden liegen, und verschieben sich hierbei zugleich  $n - 1$  Ecken längs beliebig gegebener Geraden, so beschreibt auch die letzte Ecke eine Gerade.“

In Abb. 6 sei  $ABCD$  die Anfangsgestalt des veränderlichen  $n$ -Ecks, das wir etwa

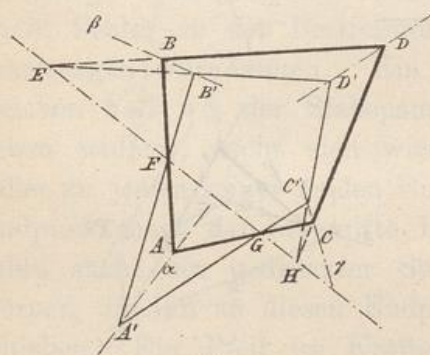


Abb. 6.

als Viereck voraussetzen wollen. Die Seiten mögen sich um die auf einer Geraden liegenden Punkte  $E, F, G, H$  drehen, während drei Ecken  $A, B, C$  auf den beliebig gewählten Geraden  $\alpha, \beta, \gamma$  fortschreiten. Eine neue Lage erhält man, indem man  $B'$  auf  $\beta$  beliebig annimmt, hier-

auf die Seitenrichtungen  $B'D'$  durch  $E$  und  $B'A'$  durch  $F$  zieht, im Punkte  $A'$  die Seite  $A'C'$  durch Punkt  $G$  anträgt und von  $C'$  aus die Richtung der Seite  $C'D'$  durch Punkt  $H$  führt. Der vierte Eckpunkt  $D'$  ergibt sich dann als Schnittpunkt der Linien  $EB'$  und  $HC'$ . Um zu erkennen, dass auch  $D$  auf einer geraden Linie nach  $D'$  hin fortwandert, beachte man, dass die Seiten des veränderlichen Vielecks projektivische Strahlenbüschel um die Strahlencentren  $EF, FG, H$  beschreiben, indem je zwei aufeinander folgende perspektivisch zueinander liegen. Jedenfalls ist also auch Strahlenbüschel  $E$  projektivisch

zum Büschel  $H$ . Der Schnitt von zwei projektivischen Strahlenbüscheln ist nun zwar im Allgemeinen eine Curve zweiter Ordnung. Hier sind aber die Büschel  $E$  und  $H$  nicht nur projektivisch, sondern zugleich perspektivisch zu einander, da sie den die beiden Centren  $E$  und  $H$  verbindenden Strahl entsprechend gemeinsam haben. Eine specielle Lage des veränderlichen Vielecks ist nämlich auch jene, bei der alle Seiten und alle Eckpunkte auf die Gerade  $EH$  fallen. Der Punkt  $D$  beschreibt hiernach als Schnitt von zwei perspektivischen Strahlenbüscheln in der That eine Gerade. — Auch ein stereometrischer Beweis des Satzes lässt sich leicht geben, wovon aber hier abgesehen werden kann.

Kehrt man nun zur Betrachtung von Abb. 5<sup>b</sup> zurück, so erkennt man, dass jeder beliebig getroffenen Wahl  $2'$  oder  $2''$  von  $2$  im Grundrisse ein Viereck (nämlich ein Trapez) in der Figur entspricht, das aus dieser Strecke, den sich beiderseits anschliessendem Projektionsstrahlen und dem zugehörigen Aufrisse gebildet wird. Die entsprechenden Seiten aller dieser Vierecke sind parallel zu einander, d. h. sie drehen sich, wenn man von einem zu einem andern Vierecke übergeht, wie wir sagen können, um unendlich ferne Punkte, die auf der unendlich fernen Graden der Ebene enthalten sind. Zugleich schreiten drei Eckpunkte auf den Graden 1 und 3 des Grundrisses und 3 des Aufrisses weiter. Die Voraussetzungen des zuvor bewiesenen geometrischen Satzes sind hiernach erfüllt und wir schliessen, dass auch die vierte Ecke auf einer Graden fortschreiten muss, von der zwei Punkte, nämlich  $X$  und  $Y$ , bereits bekannt sind. Verbinden wir daher  $X$  und  $Y$  durch eine Gerade, so muss auf dieser auch der vierte Eckpunkt des Vierecks enthalten sein, das wir suchen. Der Schnittpunkt der Graden  $XY$  mit 1 im Aufrisse liefert diesen Eckpunkt und von ihm aus können wir 2 im Aufrisse richtig eintragen, worauf auch der zugehörige Grundriss folgt. Man hat hierbei noch eine Controlle für die Genauigkeit der Zeichnung, indem der zu 2 im Aufrisse construirte Grundriss von selbst in die vorgeschriebene Richtung fallen muss. — Die Beschreibung

und Begründung des Verfahrens machte zwar eine längere Auseinandersetzung nöthig; die wirkliche Ausführung der Zeichnung erfordert aber nur das Ziehen weniger Linien und gestaltet sich ganz einfach.

Dieselbe Aufgabe kann schliesslich auch noch analytisch gelöst werden. Man zieht zu diesem Zwecke drei rechtwinklig aufeinander stehende Coordinatenachsen und ermittelt die Winkel zwischen den Stabrichtungen und den Coordinatenrichtungen sowie die Projektionen  $P_1 P_2 P_3$  von  $\mathfrak{P}$  auf die Coordinatenachsen. Bezeichnet man dann die Spannung des Stabes 1 mit  $S_1$  und die Richtungswinkel dieses Stabes mit  $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$  und ähnlich bei den übrigen Stäben, so findet man die Unbekannten  $S_1 S_2 S_3$  durch Auflösen der drei Componentengleichungen

$$\left. \begin{aligned} S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3 &= P_1, \\ S_1 \cos \beta_1 + S_2 \cos \beta_2 + S_3 \cos \beta_3 &= P_2, \\ S_1 \cos \gamma_1 + S_2 \cos \gamma_2 + S_3 \cos \gamma_3 &= P_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

die alle vom ersten Grade sind. Die Ermittlung der Winkel und die Auflösung der Gleichungen verursacht aber in der Regel weit mehr Mühe, als irgend eine der vorher besprochenen graphischen Lösungen.

Schliesslich muss noch darauf hingewiesen werden, dass die Aufgabe keine Lösung mehr zulässt, sobald die drei Stäbe in derselben Ebene enthalten sind. Dieser Ausnahmefall, der in ähnlicher Weise auch noch bei manchen anderen Untersuchungen wiederkehren wird, erfordert noch eine aufmerksame Betrachtung. Er lässt sich in zwei Unterfälle spalten, die durch die Abb. 7 und 8 in axonometrischer Zeichnung wiedergegeben sind. Im Falle der Abb. 7 liegen zugleich die Fusspunkte  $A, B, C$  der drei Stäbe auf einer Geraden. Man

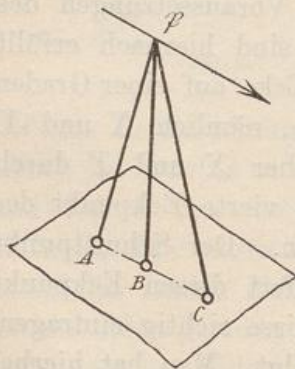


Abb. 7.

sieht hier sofort ein, dass der obere Knotenpunkt durch die drei Stäbe nicht mehr in seiner Lage festgehalten werden kann:

er vermag sich vielmehr um die Gerade  $ABC$  ohne Widerstand zu drehen. Schon aus dieser geometrischen Betrachtung erkennt man, dass durch die Stabspannungen kein Gleichgewicht mehr am oberen Knotenpunkte hergestellt werden kann; es sei denn, dass die Kraft  $\mathfrak{P}$  zufällig auch in der Stabebene liegt. Auch mechanisch geht dies daraus hervor, dass die Resultirende der drei Stabspannungen nothwendig wieder in der Stabebene liegen muss und daher mit einer Kraft, die zu dieser Ebene unter irgend einem Winkel geneigt ist, nicht im Gleichgewichte stehen kann. Liegt aber  $\mathfrak{P}$  selbst in der Stabebene, so bleibt die Aufgabe statisch unbestimmt, da man einer Stabspannung einen beliebigen Werth beilegen und durch geeignete Wahl der beiden anderen Gleichgewicht herstellen könnte.

In dem durch Abb. 8 dargestellten Falle liegen die Fusspunkte  $A, B, C$  der drei Stäbe nicht mehr in einer Geraden die Stäbe selbst aber immer noch in einer Ebene. Man nehme etwa an, dass zwei der Stäbe unmittelbar am Fussboden befestigt sind, während der Fusspunkt  $B$  des dritten Stabes auf irgend einer Erhöhung liegt, die um  $BB'$  über den Fussboden emporragt. In diesem Falle ist zwar eine endliche Verschiebung des oberen Knotenpunktes ohne Aenderung der Stablängen nicht mehr möglich, wohl aber, wie man zu sagen pflegt, eine unendlich kleine. Der obere Knotenpunkt vermag sich nämlich um eine unendlich kleine Strecke senkrecht zur Stabebene zu verschieben, ohne dass sich die Stablängen um mehr als um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung zu ändern brauchten, d. h. der Knotenpunktsweg ist ungemein gross gegenüber den sehr kleinen Aenderungen der Stablängen, die wegen der Elasticität der Stäbe zu erwarten sind. Man erkennt dies leicht daraus, dass sich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, von

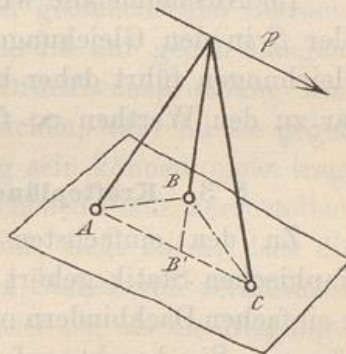


Abb. 8.

dem eine Kathete unendlich klein ist, nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung von der anderen Kathete unterscheidet. — Sobald eine solche Verschiebung des Knotenpunktes eingetreten ist, liegen die drei Stäbe nachher nicht mehr genau in derselben Ebene, so dass schliesslich doch wieder Gleichgewicht zwischen den Stabspannungen und der Belastung  $\mathfrak{P}$  zu Stande kommen kann.

Hierbei ist aber noch zu beachten, dass die Stabspannungen sehr gross im Verhältnisse zur Last  $\mathfrak{P}$  gefunden werden, wenn die Stäbe zwar nicht genau, aber nahezu in einer Ebene liegen. Man pflegt daher auch zu sagen, dass die Stabspannungen im Ausnahmefalle unendlich gross werden müssten, womit nur ausgedrückt werden soll, dass selbst durch noch so grosse Stabspannungen kein Gleichgewicht mehr am Knotenpunkte — im Falle der Abb. 8 wenigstens nicht ohne eine vorausgehende Verschiebung des Knotenpunktes — hergestellt werden könnte.

Im Ausnahmefalle wird die Determinante der Coefficienten aller  $S$  in den Gleichungen (1) zu Null; die Auflösung dieser Gleichungen führt daher beim analytischen Verfahren unmittelbar zu den Werthen  $\infty$  für die Stabspannungen.

### § 3. Kräftepläne für einfache Dachbinder.

Zu den einfachsten und häufigsten Anwendungen der graphischen Statik gehört die Ermittlung der Stabspannungen in einfachen Dachbindern oder ihnen ähnlich gestalteten Brückenträgern. Sie beruht auf einer mehrfachen Wiederholung der im Anschlusse an Abb. 2 besprochenen Lösung der Aufgabe, eine gegebene Kraft nach zwei mit ihr in derselben Ebene liegenden Richtungslinien zu zerlegen. Freilich knüpfen sich daran alsbald noch weitergehende Ueberlegungen, die eine eingehende Besprechung erfordern.

Zur Erläuterung bemerke ich zunächst, dass man zur Errichtung von Brücken oder ähnlichen Tragconstructions vor Allem zwei, oder bei freitragenden Dächern eine grössere Zahl von „Hauptträgern“ oder „Bindern“ in parallelen, lothrechten Ebenen aufzustellen pflegt, die die ganze Spannweite über-