



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Zusammenhang zwischen Scheerkraft und Biegemoment.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

zerlegt denken kann, gleiche Formänderungen ausführen, oder dass überhaupt alle Formänderungs- und Spannungsgrößen von der Querschnittscoordinate z unabhängig sind, geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$$

und da σ_x schon überall als bekannt vorauszusetzen ist, lässt sich aus ihr die Vertheilung der Schubspannungen der Höhe des Balkenquerschnitts nach leicht ableiten.

Es kommt zwar auf dasselbe hinaus, ist aber anschaulicher, wenn man diese Betrachtung durch eine andere ersetzt.

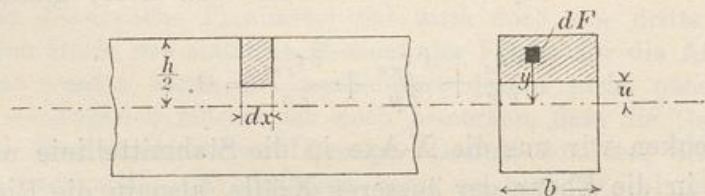


Abb. 26.

Die Gl. (5) bezogen sich auf das Gleichgewicht eines unendlich kleinen Parallelepipeds; wir wollen dieselbe Schlussfolgerung, die zu ihnen führte, jetzt auf das Gleichgewicht eines etwas grösser abgegrenzten Körpertheiles anwenden. In Abb. 26

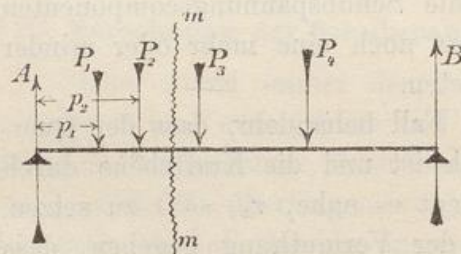


Abb. 27.

ist links ein Stück der Ansichtzeichnung des Balkens, rechts der Querschnitt dargestellt, und der scheibenförmige Theil des Balkens, dessen Gleichgewicht wir untersuchen wollen, ist in beiden Projectionen durch Schraffirung hervorgehoben. Ausserdem gibt Abb. 27 noch eine Gesamtübersicht des Balkens und der an ihm angreifenden Lasten. Wir stellen zunächst eine Beziehung auf, die zwischen dem Biegemomente M und der Scheerkraft V für irgend einen Querschnitt mm besteht. Nach den Definitionen dieser Größen hat man

$$V = A - \sum_0^x P \quad \text{und} \quad M = Ax - \sum_0^x P(x - p).$$

Differentiirt man M nach x , so erhält man

$$\frac{dM}{dx} = A - \sum_0^x P.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass man beim Weiterücken des Querschnitts um die Strecke dx nicht über den Angriffspunkt einer Einzellast hinausrückt, denn an einer solchen Stelle ist zwar M selbst stetig, $\frac{dM}{dx}$ erleidet aber einen plötzlichen Sprung. Tritt indessen eine stetig vertheilte Belastung an die Stelle des Systems der Einzellasten, so bleibt die Gleichung immer noch gültig, da der Zuwachs, den M dann ausserdem noch erfährt, weil ein Belastungsdifferential, das vorher zur rechten Seite zählte, auf die linke Seite übertritt, nur von der zweiten Ordnung unendlich klein ist und daher nicht in Betracht kommt.

Man hat daher, wie aus dem Vergleiche der vorstehenden Formeln hervorgeht, allgemein

$$V = \frac{dM}{dx}, \tag{72}$$

denn auch V theilt mit dem Differentialquotienten von M die Eigenschaft, seinen Werth sprungweise zu ändern, wenn der Querschnitt über den Angriffspunkt einer Einzellast hinausgerückt wird.

Man kann sich diese einfache, aber sehr wichtige Beziehung auch noch in anderer Weise klar machen. Für den Schnitt mm waren die äusseren Kräfte links vom Schnitte auf die Scheerkraft V im Querschnittsschwerpunkte und das Kräftepaar vom Momente M zurückgeführt. Gehen wir um dx weiter, so muss V parallel um dx verlegt werden. Dabei tritt aber noch ein Kräftepaar Vdx auf, das die Aenderung von M darstellt; aus $dM = Vdx$ folgt aber Gl. (72) sofort.

An dem in Abb. 26 angegebenen scheibenförmigen Körper-

theile greifen die Spannungen an den drei Schnittflächen an. Wir wollen dabei nur auf das Gleichgewicht gegen Verschieben in horizontaler Richtung achten. Von den Spannungen an den quer zur Stabaxe gehenden Schnittflächen kommen dann nur die Normalspannungen σ in Betracht. Nach Gl. (48) ist in dem Schnitte mit der Abscisse $x =$

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y$$

und an dem Schnitte mit der Abscisse $x + dx$ kommt noch ein Differential hinzu, das sich durch Differentiiren, also aus

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{y}{\Theta} = \frac{Vy}{\Theta}$$

leicht feststellen lässt. Die Normalspannungen an beiden Schnittflächen wirken in entgegengesetzter Richtung; für das Gleichgewicht gegen Verschieben kommt also nur ihr Unterschied in Frage. Im Ganzen erhalten wir dafür

$$\int_u^{\frac{h}{2}} d\sigma dF = dx \frac{V}{\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF,$$

wenn die Integration über den schraffirten Theil des Querschnitts ausgedehnt wird.

In der dritten Schnittfläche wirkt nur die Schubspannung τ_{yx} in horizontaler Richtung und zwar über die Fläche $b dx$. Die Gleichgewichtsbedingung liefert

$$\tau_{yx} b dx = dx \frac{V}{\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF,$$

woraus τ_{yx} und damit auch die gesuchte Schubspannung τ_{xy} im Querschnitte in der Entfernung u von der Nulllinie,

$$\tau_{xy} = \frac{V}{b\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF \quad (73)$$

folgt. Das Integral stellt das statische Moment des über u

hinaus liegenden Querschnittstheiles in Bezug auf die Nulllinie dar. Für den rechteckigen Querschnitt ist

$$\int_u^{\frac{h}{2}} y dF = b \left(\frac{h^2}{8} - \frac{u^2}{2} \right) \quad \text{und daher} \quad \tau = \frac{V}{\Theta} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{u^2}{2} \right).$$

Wir wollen aber für dieses statische Moment ausserdem noch den Buchstaben S setzen, also Gl. (73) in der Form

$$\tau_{xy} = \frac{VS}{b\Theta} \quad (74)$$

schreiben, denn offenbar kann die vorausgehende Betrachtung auch dann angewendet werden, wenn der Querschnitt nicht ein einfaches Rechteck bildet, sondern nur dort, wo wir τ berechnen wollen, durch zwei parallele Seiten begrenzt wird, wie z. B. der Steg eines I-Trägers. Auch für solche Fälle ist durch Gl. (74) die Aufgabe gelöst, denn das statische Moment S , das zu einem gegebenen u gehört, kann immer leicht gefunden werden.

Durch Gl. (74) ist τ als Function von u bestimmt und damit die Spannungsvertheilung gegeben. Wir erkennen aus dieser Gleichung, dass τ am Rande des Querschnitts verschwindet, also gerade dort, wo die Normalspannung ihren grössten Werth annimmt, und dass umgekehrt τ am grössten wird in der Nulllinie, also da, wo die Normalspannung verschwindet. Speciell für den rechteckigen Querschnitt ist τ eine Function zweiten Grades von u . Wenn wir diese Function durch eine Curve darstellen, wie wir es früher thaten, um die Vertheilung der Normalspannungen vor Augen zu führen, erhalten wir jetzt eine Parabel. Das lineare Spannungsvertheilungsgesetz gilt also nur für die Normalspannungen und nicht für die Schubspannungen.

Es bleibt jetzt noch die Vertheilung der Schubspannungen über einen anders gestalteten Querschnitt zu besprechen. Wir wählen zur Erläuterung des Verfahrens einen kreisförmigen Querschnitt, der deshalb von besonderer Wichtigkeit ist, weil die Nieten vorwiegend auf Schub beansprucht werden und

sich bei ihnen die Schubkraft, die sie übertragen, über einen kreisförmigen Querschnitt vertheilt. Hier dürfen wir nicht, wie vorher beim rechteckigen Querschnitte, die Schubspannungskomponenten τ_{xz} , die quer zur Kräfteebene gehen, gleich Null setzen. Vielmehr muss am Umfange die resultirende Schubspannung in die Richtung der Querschnittstangente fallen,

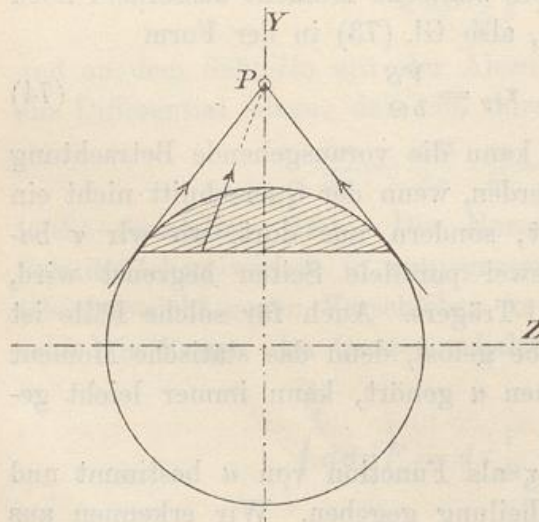


Abb. 28.

wenigstens dann, wenn am Umfange des Stabes keine äusseren Kräfte in der Richtung der Stabaxe auftreten. Dies folgt aus dem Gleichgewichte eines unendlich kleinen Parallelepipeds, von dem eine Kante mit einem Elemente des Querschnittsumrisses zusammenfällt. Wenn die Schubspannung am Umfange eine Komponente in der Richtung der Normalen zum Querschnittsumriss haben sollte, müsste, um das Gleichgewicht gegen Drehen zu sichern, nothwendig auch eine Kraft auf der Mantelfläche des Stabes in der Richtung der Stabaxe übertragen werden, aus demselben Grunde, aus dem wir früher $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ fanden.

Nun kann man freilich im Zweifel sein, ob nicht in der That bei einem Niete, dessen Schaft von den Blechen, die er verbindet, vollständig umschlossen wird, solche Kräfte — also Reibungskräfte — in der Richtung der Stabaxe am Umfange auftreten. Gerade bei diesem für die Anwendungen sehr wichtigen Falle ist daher die hier durchzuführende Betrachtung ganz unsicher und man thut in der That bei der Berechnung von Nieten viel besser, sich an die Ergebnisse von Versuchen zu halten, durch die die Festigkeit von Nietverbindungen un-