



Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 19. Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hilfe des
Momentenplanimeters.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

Gefahr für die Festigkeit des Stabes bedingt, d. h. bei welcher Richtung die Kantenspannung σ_0 den grössten Werth annimmt, wenn das Biegemoment M ein für alle Mal gegeben ist (also etwa bei gegebenen Lasten). Es ist jene Richtung, zu der die kleinste Kernweite k gehört, beim rechteckigen Querschnitte also die zu einer Diagonale senkrechte Richtung. Das letzte Resultat geht übrigens auch schon aus der in § 16 gegebenen Rechnung hervor, denn die in Abb. 21 mit c bezeichnete Grösse, die in Gl. (65) allein als von der Richtung der Biegungsebene abhängiger Factor auftrat, nimmt in dem bezeichneten Falle ihren grössten Werth an; sie wird dann gleich der Rechtecksdiagonale.

§ 19. Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hilfe des Momentenplanimeters.

Es giebt keinen zweiten Gegenstand der technischen Mechanik, über den schon so viel geschrieben worden wäre, als über die Lehre von den Trägheitsmomenten und die damit zusammenhängenden Betrachtungen, von denen die letzten Paragraphen handeln. Dahin gehören namentlich auch die zahlreichen Methoden, die zur Bestimmung der Trägheitsmomente von Querschnittsflächen ausgearbeitet wurden. Es ist nicht möglich, aber auch nicht nöthig, sie hier alle vorzuführen; es wäre damit fast so, als wenn man in einem Lehrbuche der Euklidischen Geometrie alle bisher aufgestellten Beweise für den Pythagoräischen Lehrsatz abdrucken wollte. Die zeichnerischen Methoden gehören überdies zur graphischen Statik und die schönste, die von Mohr herrührt, wird dort behandelt werden. An dieser Stelle genügt es, wenn darauf hingewiesen wird, dass irgend eine principielle Schwierigkeit bei der Ermittlung des Trägheitsmomentes niemals bestehen kann, da man im schlimmsten Falle sich immer damit helfen kann, dass man den Querschnitt in schmale Streifen zerlegt, die zur Axe parallel laufen, für die das Trägheitsmoment ermittelt werden soll, dass man den Flächeninhalt jedes Streifens mit dem Quadrate des mittleren Abstandes von der Axe multiplicirt und die Producte addirt. Unbedingte Genauigkeit wird bei Festigkeitsberechnungen niemals gefordert — oder höchstens unverständiger Weise — und den berechtigten Ansprüchen an die Genauigkeit lässt sich dabei leicht vollständig genügen. Viel Werth vermag ich daher jenen Untersuchungen nicht

beizulegen, ich pflege vielmehr meinen Hörern zu rathen, wenn sie einmal den Drang fühlen, selbst etwas zur Bereicherung der Wissenschaft beizutragen, ihre Kräfte lieber bei anderen Dingen einzusetzen, die wohl nicht zu so mühelosen, dafür aber auch zu werthvolleren Resultaten führen.

Dagegen soll hier noch auseinandergesetzt werden, auf welchem

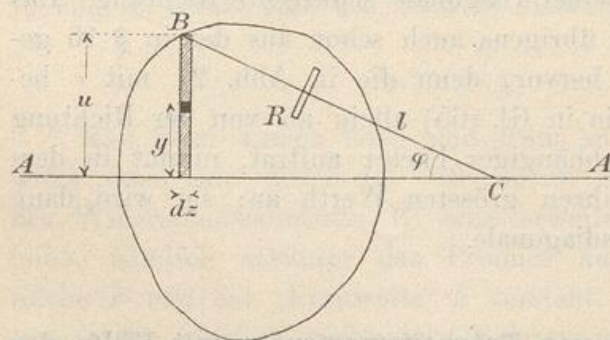


Abb. 25.

Gedankenganges von Amsler zur mechanischen Ermittlung der Trägheitsmomente construirte Momentenplanimeter beruht. In Abb. 25 sei AA' die Axe, für die das Trägheitsmoment ermittelt werden soll. Wir dehnen die Summirung zu-

nächst über den schmalen Streifen aus, der durch Schraffirung hervorgehoben ist. Dieser liefert zum Trägheitsmomente den Beitrag

$$dz \int_0^u y^2 dy = dz \frac{u^3}{3}.$$

Eine Stange BC von der Länge l wird so herumgeführt, dass das Ende B auf dem Querschnittsumfange, das Ende C auf der Achse AA' fortschreitet. Man hat $u = l \sin \varphi$ und das Trägheitsmoment der ganzen Fläche ist daher

$$\Theta = \frac{l^3}{3} \int \sin^3 \varphi dz.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch etwas umformen mit Hülfe der goniometrischen Formel

$$\sin^3 \varphi = \frac{3 \sin \varphi - \sin 3\varphi}{4}.$$

Er geht dadurch über in

$$\Theta = \frac{l^3}{4} \int \sin \varphi dz - \frac{l^3}{12} \int \sin 3\varphi dz.$$

Unmittelbar an der Stange BC des Instruments ist eine Rolle R befestigt. Wenn man mit dem Stifte am Ende B der Stange

den Umfang des Querschnitts umfährt, rollt R über die Papierfläche und die Drehung, die sie nach Beendigung des Umlaufs ausgeführt hat, kann mit Hülfe eines Nonius abgelesen werden. Während der Stift B das zu dem schraffirten Streifen gehörige Element des Umfangs durchläuft, findet eine Drehung der Rolle statt, die in zwei Theile zerlegt werden kann. Der eine Theil ist durch die Verticalprojection, der andere durch die Horizontalprojection des Umfangselements bedingt. Hat man mit dem Umfahren bei dem einen auf der Axe AA liegenden Punkte begonnen, war also die Stange BC zuerst horizontal gerichtet, so nimmt sie wieder dieselbe Richtung an, wenn der Stift B an dem anderen auf AA liegenden Punkte angelangt ist. Die verticalen Wege von B liefern also zusammen Null und alle Drehungen, die durch die Verticalprojectionen der Umfangselemente auf der einen Seite von AA bedingt sind, heben sich daher ebenfalls gegeneinander auf. Wir brauchen also nur auf die Drehungen zu achten, die durch die Horizontalcomponenten des Weges von B veranlasst werden. Für das betrachtete Umfangselement ist der Weg in horizontaler Richtung gleich dz . Nun ist klar, dass die Rolle gar keine Drehung ausführt, wenn sich die Stange in ihrer eigenen Richtung verschiebt; es kommt also auch bei der Parallelverschiebung der Stange um dz nur auf jenen Antheil des Weges an, der senkrecht zur Stangenrichtung steht und dieser ist gleich $dz \sin \varphi$. Wenn der oberhalb der Axe liegende Theil des Umfangs durchlaufen ist, wird demnach die Drehung der Rolle proportional mit

$$\int \sin \varphi dz$$

sein. Wenn dann weiter der untere Theil durchlaufen wird, lassen sich dieselben Betrachtungen wieder anwenden. Man muss dabei beachten, dass jeder Factor des Productes $\sin \varphi dz$ das dem vorigen entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, dass also das Product selbst das gleiche Vorzeichen behält. Daher heben sich die durch die horizontalen Wege bedingten Rollenumdrehungen nicht gegeneinander auf, wie es bei den verticalen Wegen des Stiftes B der Fall war. Im Ganzen bildet vielmehr die Rollenablesung unmittelbar ein Maass für das über den ganzen Umfang erstreckte $\int \sin \varphi dz$. Man sieht daher ein, dass nach einmaligem Umfahren der Fläche mit dem Stifte B das erste Glied des für Θ gefundenen Ausdrucks, abgesehen von einem constanten Factor, der von der Construction des Instruments abhängt, unmittelbar vom Instrumente abgelesen werden kann. Das zweite Glied in dem Ausdrücke für Θ ist ganz ähnlich gebildet, wie das erste; der wesentliche Unterschied besteht

nur darin, dass der Sinus des dreifachen Winkels vorkommt. Dem lässt sich aber leicht Rechnung tragen, indem man eine zweite Rolle anbringt, deren Lager durch eine Zahnradübersetzung im Verhältnisse 1 : 3 mit der Stange B verbunden ist, so dass die Umdrehungsaxe dieser zweiten Rolle in jedem Augenblicke den Winkel 3φ mit der Axe AA bildet. An der Horizontalverschiebung der Stange nimmt sie ebenso Theil wie die vorige Rolle, und die an ihr nach einem ganzen Umlaufe genommene Ablesung gibt daher ein Maass für die Grösse des zweiten Gliedes in dem Ausdrucke für Θ . Demnach erhält man für Θ

$$\Theta = \alpha r - \beta r_1,$$

wenn α und β Constanten des Instruments, die ein für alle Mal ermittelt sind und r und r_1 die Rollenablesungen bedeuten.

Das Amsler'sche Planimeter hat auch noch eine dritte Rolle, mit deren Hülfe das statische Moment der Fläche für die Axe AA bestimmt werden kann; ich werde aber darauf nicht näher eingehen. — Zugleich möchte ich noch bemerken, dass die Genauigkeit bei Querschnitten von Iförmiger Gestalt oder bei Schienenprofilen nach meinen Erfahrungen nicht so hoch ist, als die der graphischen Methoden. Man erhält nämlich Θ als Differenz von zwei Werthen, die sich verhältnissmässig wenig von einander unterscheiden, so dass die Beobachtungsfehler im Vergleiche zu dieser Differenz ziemlich beträchtlich werden, wenn auch jedes einzelne Glied an sich recht genau ermittelt werden kann.

§ 20. Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Stabe.

Bisher stand immer der Fall der reinen Biegungsbeanspruchung im Vordergrund und für diesen hatten wir Grund genug zu der Annahme, dass überhaupt keine Schubspannungen im Querschnitte übertragen werden. Wir betrachten jetzt den allgemeineren Fall, dass die äusseren Kräfte an einem Stabtheile neben einem Biegemomente auch noch eine Scheerkraft V liefern. Nach dem Grundsätze der Superposition verschiedener Spannungszustände wird dadurch an der Vertheilung der Normalspannungen σ über den Querschnitt nichts geändert. Wir können daher die früher durchgeführte Berechnung von σ auch im allgemeineren Falle ohne weiteres anwenden. Dagegen bleibt hier noch die Frage zu entscheiden, wie sich die Schubspan-