



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Vorlesungen über technische Mechanik**

**Föppl, August**

**Leipzig, 1900**

§. 18. Berechnung der Biegungsspannungen mit Hilfe des Kerns.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

Die Centralellipse ist daher dem Querschnittsumrisse ähnlich. Auch der Kern ist eine hierzu ähnliche und ähnlich liegende Ellipse, deren Halbaxen, die sich ganz wie beim Kreise berechnen lassen, den vierten Theil jener vom Querschnittsumrisse ausmachen.

### § 18. Berechnung der Biegungsspannungen mit Hülfe des Kerns.

Schon früher wurde darauf hingewiesen, dass der Fall der reinen Biegungsbeanspruchung als ein Sonderfall der excentrischen Belastung aufgefasst werden kann. Wir können daher die Entwicklungen des letzten Paragraphen benutzen, um noch eine andere Lösung der schon in § 16 behandelten Aufgabe daraus abzuleiten.

In Abb. 24 ist der Querschnitt als Rechteck gewählt; er könnte aber ebenso gut auch irgend eine andere Gestalt haben. Centralellipse und Querschnittskern sind ebenso wie in Abb. 23 eingetragen. Mit  $BB$

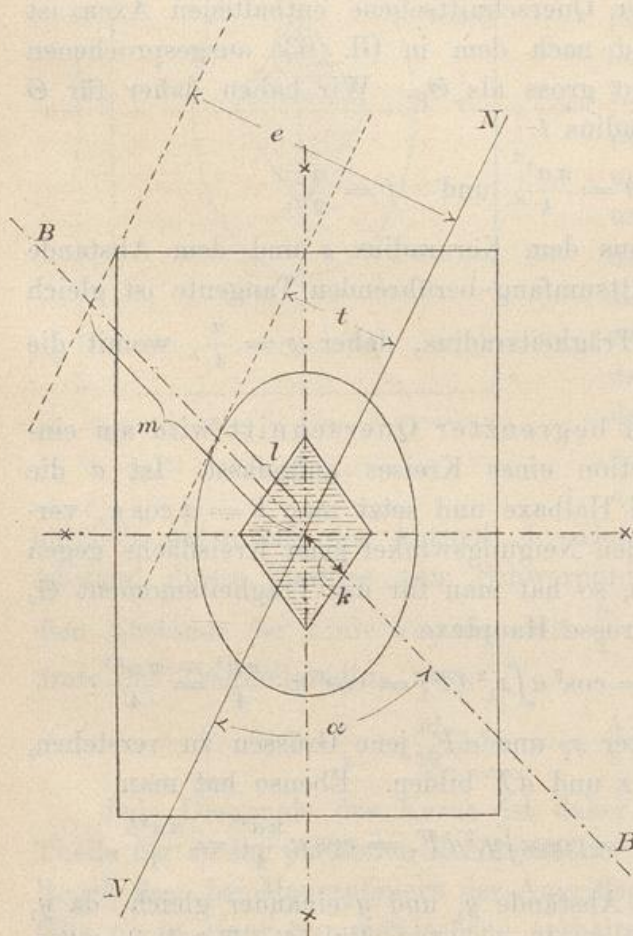


Abb. 24.

ist die Spur der Ebene bezeichnet, in der das Kräftepaar vom Biegemomente  $M$  liegen möge. Wir fassen dieses Kräfte-

paar als eine unendlich kleine und unendlich ferne Kraft auf, deren Angriffspunkt daher der unendlich ferne Punkt der Geraden  $BB$  ist. Die zugehörige Nulllinie  $NN$  ist die Antipolare dieses Punktes und sie geht daher in der Richtung des zu  $BB$  conjugirten Durchmessers der Centralellipse. Wir finden diese Richtung, indem wir im Durchschnittspunkte von  $BB$  mit der Centralellipse eine Tangente construiren. Zu dieser geht  $NN$  parallel. Die grösste Spannung tritt an den Kanten auf, die den grössten Abstand, nämlich den Abstand  $e$  von der Nulllinie haben. Um diese Spannung, die mit  $\sigma_0$  bezeichnet werden soll, zu berechnen, schreiben wir noch die Bedingung an, dass das Moment aller Spannungen gleich dem Momente des biegenden Kräftepaares für die Momentenaxe  $NN$  sein muss. Dass die Spannungen ein Kräftepaar liefern, das in der Ebene der äusseren Kräfte liegt, ist schon durch die Festsetzung der richtigen Lage der Nulllinie verbürgt; wir brauchen uns also nur noch um die Grösse der Momente zu kümmern.

Hierbei ist zu beachten, dass die Nulllinie  $NN$  nicht senkrecht zur Ebene des Biegemomentes  $M$  steht, sondern einen Winkel  $\alpha$  mit ihr bildet. Das Moment des biegenden Kräftepaares in Bezug auf die Axe  $NN$  ist daher nicht gleich  $M$ , sondern gleich  $M \sin \alpha$  zu setzen. Für die Spannung in irgend einem Flächenelemente  $dF$ , das den Abstand  $y$  von  $NN$  haben möge, können wir nach dem Navier'schen Spannungsvertheilungsgesetze  $\frac{\sigma_0}{e} y$  setzen und die Momentengleichung lautet daher

$$M \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{e} \int y^2 dF = \frac{\sigma_0}{e} \Theta_N,$$

wenn mit  $\Theta_N$  das Trägheitsmoment für die Axe  $NN$  bezeichnet wird.

Andererseits ist aber nach der Definition des Kerns

$$km = l^2,$$

oder, wenn wir an Stelle der drei auf  $BB$  liegenden Strecken ihre Projectionen auf eine zu  $NN$  senkrechte Linie einführen,

$$k \sin \alpha \cdot e = t^2 = \frac{\Theta_N}{F},$$

denn  $t$  ist nach der Definition der Centralellipse der zu  $NN$  gehörige Trägheitshalbmesser. Setzt man den hieraus folgenden Werth von  $\Theta_N$  in die erste Gleichung ein und löst sie nach  $\sigma_0$  auf, so erhält man das einfache Resultat

$$\sigma_0 = \frac{M}{F \cdot k}. \quad (70)$$

Man kann diesem noch eine etwas andere Fassung geben, wenn man dem durch Gl. (49) zuerst eingeführten Begriffe des Widerstandsmoments  $W$  eine erweiterte Bedeutung verleiht, nämlich darunter das Product aus der Querschnittsfläche  $F$  und der „Kernweite“  $k$  versteht. Diese neue Definition steht nämlich nicht im Widerspruche mit der durch Gl. (49) gegebenen, die nur für den Fall gültig war, dass die Biegungsebene durch eine Querschnittshauptaxe geht. In der That ist in diesem Falle  $ky_0 = t^2$  und daher  $\frac{\Theta}{y_0} = F \cdot k$ . Im Sinne dieser erweiterten Definition lässt sich Gl. (70) auch in der Form

$$\sigma_0 = \frac{M}{W} \quad (71)$$

schreiben und sie stimmt dann genau mit der für die gerade Belastung abgeleiteten Gl. (50) überein.

Die Berechnung nach diesen Formeln ist an sich viel einfacher als die in § 16 gegebene. Indessen wird dabei vorausgesetzt, dass der Querschnittskern bereits bekannt sei. Wenn in den Profiltabellen der Hüttenwerke der Kern in jedes Walzeisenprofil eingezeichnet wäre, was schon öfters vorgeschlagen wurde und nächstens vielleicht auch einmal ausgeführt wird, würde sich die Anwendung der Gl. (70) oder (71) schnell einbürgern. So lange der Kern aber nicht von vornherein gegeben ist, wird man mit der Rechnung schneller auf dem früher angegebenen Wege fertig.

Mit Hilfe dieser Betrachtung kann man auch leicht beurtheilen, welche Richtung der Biegungsebene  $BB$  die grösste

Gefahr für die Festigkeit des Stabes bedingt, d. h. bei welcher Richtung die Kantenspannung  $\sigma_0$  den grössten Werth annimmt, wenn das Biegemoment  $M$  ein für alle Mal gegeben ist (also etwa bei gegebenen Lasten). Es ist jene Richtung, zu der die kleinste Kernweite  $k$  gehört, beim rechteckigen Querschnitte also die zu einer Diagonale senkrechte Richtung. Das letzte Resultat geht übrigens auch schon aus der in § 16 gegebenen Rechnung hervor, denn die in Abb. 21 mit  $c$  bezeichnete Grösse, die in Gl. (65) allein als von der Richtung der Biegungsebene abhängiger Factor auftrat, nimmt in dem bezeichneten Falle ihren grössten Werth an; sie wird dann gleich der Rechtecksdiagonale.

§ 19. Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe des Momentenplanimeters.

Es giebt keinen zweiten Gegenstand der technischen Mechanik, über den schon so viel geschrieben worden wäre, als über die Lehre von den Trägheitsmomenten und die damit zusammenhängenden Betrachtungen, von denen die letzten Paragraphen handeln. Dahin gehören namentlich auch die zahlreichen Methoden, die zur Bestimmung der Trägheitsmomente von Querschnittsflächen ausgearbeitet wurden. Es ist nicht möglich, aber auch nicht nöthig, sie hier alle vorzuführen; es wäre damit fast so, als wenn man in einem Lehrbuche der Euklidischen Geometrie alle bisher aufgestellten Beweise für den Pythagoräischen Lehrsatz abdrucken wollte. Die zeichnerischen Methoden gehören überdies zur graphischen Statik und die schönste, die von Mohr herrührt, wird dort behandelt werden. An dieser Stelle genügt es, wenn darauf hingewiesen wird, dass irgend eine principielle Schwierigkeit bei der Ermittlung des Trägheitsmomentes niemals bestehen kann, da man im schlimmsten Falle sich immer damit helfen kann, dass man den Querschnitt in schmale Streifen zerlegt, die zur Axe parallel laufen, für die das Trägheitsmoment ermittelt werden soll, dass man den Flächeninhalt jedes Streifens mit dem Quadrate des mittleren Abstandes von der Axe multiplicirt und die Producte addirt. Unbedingte Genauigkeit wird bei Festigkeitsberechnungen niemals gefordert — oder höchstens unverständiger Weise — und den berechtigten Ansprüchen an die Genauigkeit lässt sich dabei leicht vollständig genügen. Viel Werth vermag ich daher jenen Untersuchungen nicht